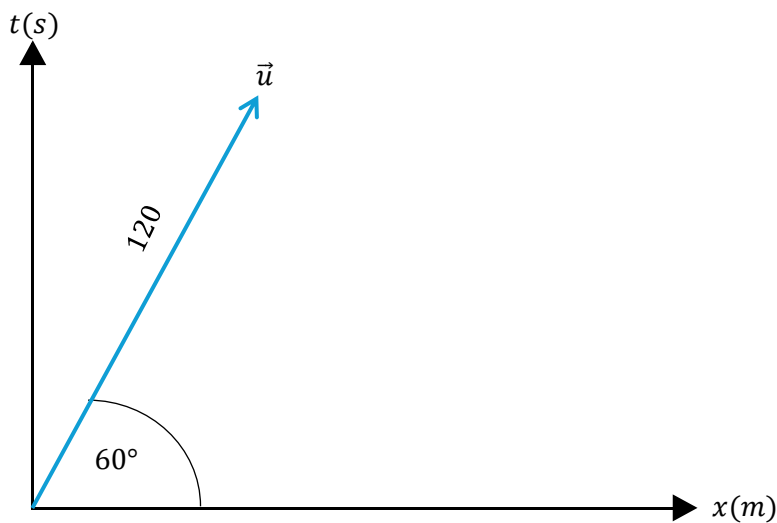


וקטורים

הגדרה: וקטור הוא גוף בעל **גודל** – למשל: 12 מטרים, ו**כיוון** – למשל 20° . וקטור גיאומטרי יסומן כחץ בגודל המתאים, ובזווית בגודל כיוון הווקטור, לעומת הציר האופקי. וקטור אלגברי יסומן באות לועזית, לרוב קטנה, עם חץ מעליה: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}$.

במילים אחרות, וקטור הוא בסך הכל חץ. האורך בו החץ נמתח נקרא 'גודל הווקטור' ואילו הזווית הנוצרת בינו לבין הציר האופקי (ציר ה-x במערכת צירים מתמטית) היא 'כיוון הווקטור'.

לדוגמה:



ניתן להגיד כי גודל הווקטור $\vec{u}$ הוא 120m וכיוונו 60° - או בסימון מתמטי: $\vec{u} = (120m, 60^\circ)$.
כתיבה זו נקראת גם 'מישור פולארי'. במישור הפולארי, בהינתן (a, b) נדע כי a הוא גודל (של ווקטור) ו- b הוא כיוון (של ווקטור). לעומת זאת – במישור הרגיל שאנו הכרנו, המישור הקרטזי, (a, b) מסמנים כי a הוא הערך המתקבל בציר האופקי (ציר x) ו- b הוא הערך המתקבל בציר האנכי (ציר y).

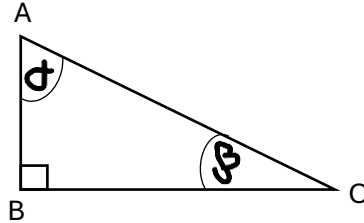
לפני שנבין כיצד אנו ממירים נתון (x, y) קרטזי לנתון (r, θ) פולארי, ולהפך, עלינו להתמצא בשלושת הפונקציות הטריגונומטריות:

היכרות עם הפונקציות הטריגונומטריות

נכיר את שלושת הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\sin(a), \cos(a), \tan(a)$$

בהינתן משולש ישר זווית ABC:



מתקיים:

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB}$$

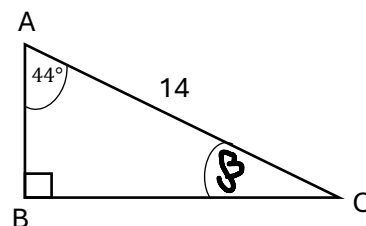
במילים יותר פשוטות: $\sin$ מחזיר את החלוקה בין הניצב שמול הזווית לבין היתר, $\cos$ מחזיר את החלוקה בין הניצב הסמוך לזווית, $\tan$ מחזיר את החלוקה בין הניצב שמול הזווית לניצב הסמוך לזווית.

! במחשבון שלנו ניתן למצוא את שלושת הפונקציות הטריגונומטריות. על מנת לוודא שהגדרות המחשבון נכונות, בדקו האם כתובה לכם בראש צג המחשבון האות 'D'. כמו כן, על מנת לפתור משוואה מהסוג: $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, $\tan(x) = a$, נלחץ במחשבון shift, נבחר בפונקציה הטריגונומטרית הדרושה בתרגיל, ולבסוף נזין במחשבון את a . ביצוע כל השלבים הללו יחזיר לנו את ערכו של x .

לדוגמה:

$$\tan(x) = -\frac{5}{2} \rightarrow x \approx -68.2^\circ$$

תרגיל לבדיקת הבנה:



מצאו את BC, מצאו את זווית β , מצאו את שטח המשולש ABC.

$$S_{ABC} = 32.846, \beta = 46^\circ, BC = 9.725$$

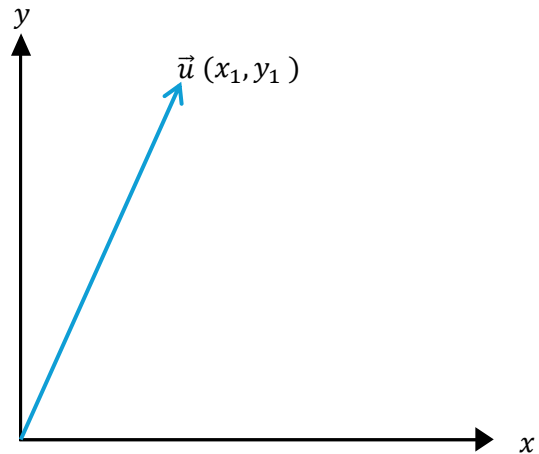
המרות ייצוגים: קרטזי $\leftrightarrow$ פולארי

המרה מייצוג קרטזי לייצוג פולארי

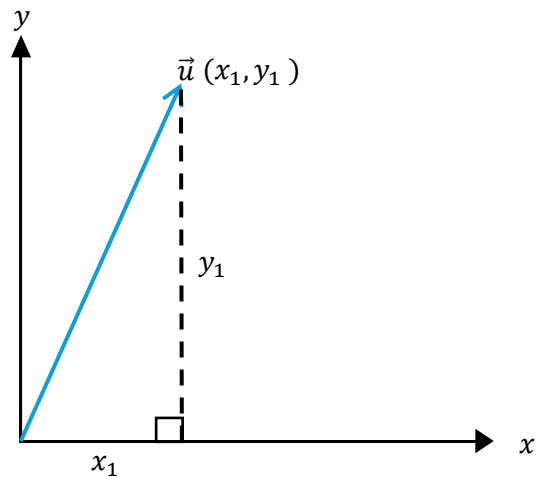
ההמרה הפשוטה יותר היא המרת רכיבים קרטזיים של וקטור, לרכיביו הפולאריים.

נתונים הרכיבים (x_1, y_1) המייצגים את נקודת הקצה אליה מצביע הווקטור.

הבה נשרטט את הבעיה בכדי להבין כיצד תתבצע ההמרה.



נוריד ישר $x = x_1$ על מנת ליצור בין החץ של $\vec{u}$ לבין הצירים משולש ישר זווית.



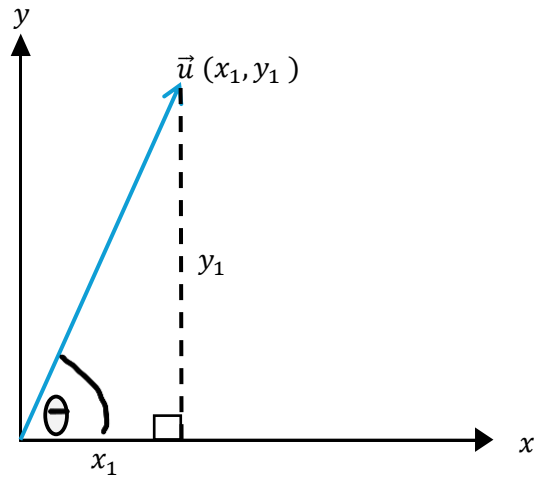
על מנת למצוא את גודל הווקטור, עלינו למצוא את אורכו של היתר. ניעזר במשפט פיתגורס:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2$$

נפעיל שורש ריבועי על הנוסחה ונקבל:

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$$

כעת נסתכל על הזווית שעלינו למצוא – אותה נסמן כ- θ :



נשים לב כי אנחנו יכולים להפעיל את פונקציית $\tan$ בכדי למצוא את שיעור θ :

$$\tan(\theta) = \frac{y_1}{x_1}$$

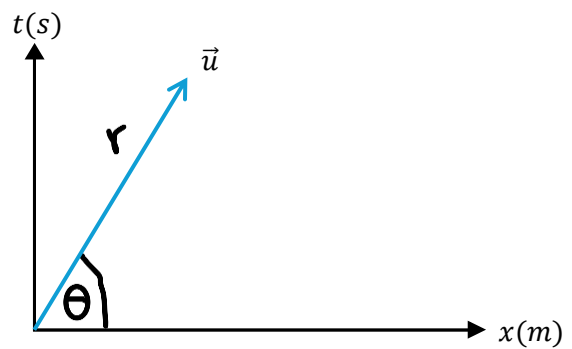
ומכאן מצאנו דרך ישירה להעביר רכיבי וקטור מייצוג קרטזי לייצוג פולארי:

$$(x_1, y_1) = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \tan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \right)$$

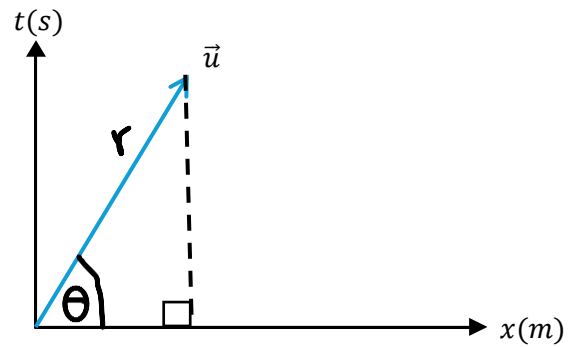
המרה מייצוג פולארי לייצוג קרטזי:

נתונים הרכיבים (r, θ) המייצגים גודל וכיוון של וקטור $\vec{u}$. נרצה למצוא את הרכיבים הקרטזיים של $\vec{u}$, כלומר, לעבור מ- (r, θ) ל- (x_1, y_1) .

נשרטט את הבעיה, כמו קודם לכן:



גם כאן, נרצה לשרטט את הניצב הסמוך לראש הווקטור:



נשים לב שבעזרת היתר הנתון r והזווית הנתונה θ – ניתן למצוא את רכיבי ה- x, y של הווקטור בצורה טריגונומטרית:

$$x_1 = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y_1 = r \cdot \sin(\theta)$$

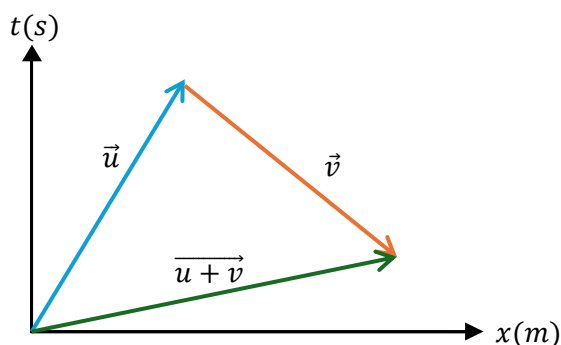
נשים לב שהנוסחה יכולה להשתנות בהתאם לשרטוט ולזווית שנבחר להתמקד. (לדוגמה אם במקום העברת הניצב האנכי בשרטוט לעיל, היינו מעבירים ישר אופקי בין ציר ה- y לבין ראש הווקטור...)

! לכן מומלץ תמיד לשרטט את הבעיה, לבחור את דרך הפתרון הנוחה ביותר – ולזכור את הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות.

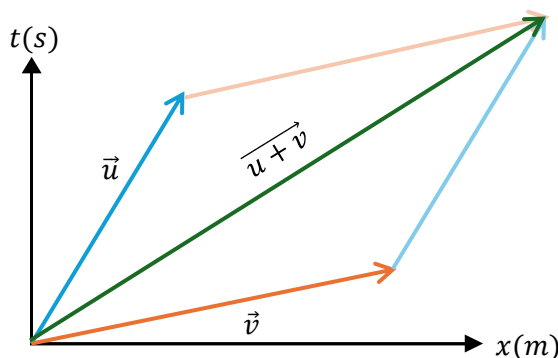
פעולות על וקטורים:

חיבור וקטורים:

הגדרה גיאומטרית: יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ שני וקטורים מתלכדים (וקטור אחד ממשיך את השני). שרטוט וקטור הסכום $\vec{u} + \vec{v}$ יהיה וקטור אשר יוצא מראש הווקטור $\vec{u}$ אל ראש הווקטור $\vec{v}$. כלל זה נקרא גם 'כלל המשולש' שכן חיבור של שני וקטורים תמיד שואף 'לסגור' משולש בין הווקטורים.



עבור שני וקטורים שאינם מתלכדים, נפעל בכלל המקבילית: נבנה את הווקטורים המקבילים לשני הווקטורים הנתונים, ונמתח אלכסון בין נקודות המפגש. אלכסון זה יהווה את סכום הווקטורים.



הגדרה אלגברית: יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ שני וקטורים בעלי הרכיבים הקרטזיים הבאים בהתאמה: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . וקטור הסכום יהיה וקטור בעל הרכיבים הקרטזיים הבאים: $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

לדוגמה, סכום הווקטורים $(5, 12)$ ו- $(-3, 9)$ הוא הווקטור $(2, 21)$.

! במידה והווקטורים שאנו מעוניינים לסכום מופיעים בייצוג פולארית, נבצע כנלמד המרה של הווקטורים לייצוג קרטזי להקלה על ההליך.

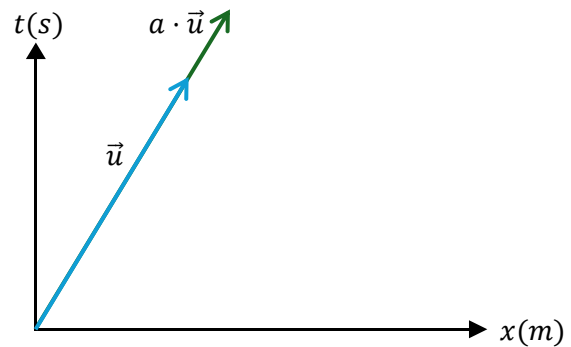
!! וקטור הסכום נקרא גם 'הווקטור השקול' או 'השקול'.

כפל בסקלר:

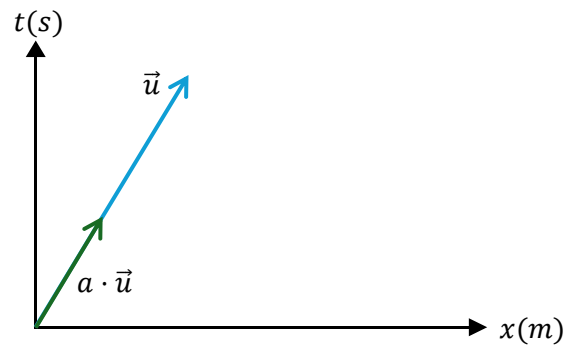
הגדרה: סקלר הוא קבוע ממשי כלשהו (מספר ללא יחידת מידה או ייחודיות).

הגדרה גיאומטרית: יהי הווקטור $\vec{u}$ והסקלר a . פעולת הכפל בסקלר $a \cdot \vec{u}$ משפיעה על אורך הווקטור $\vec{u}$ ואף עשויה להפוך את כיוונו.

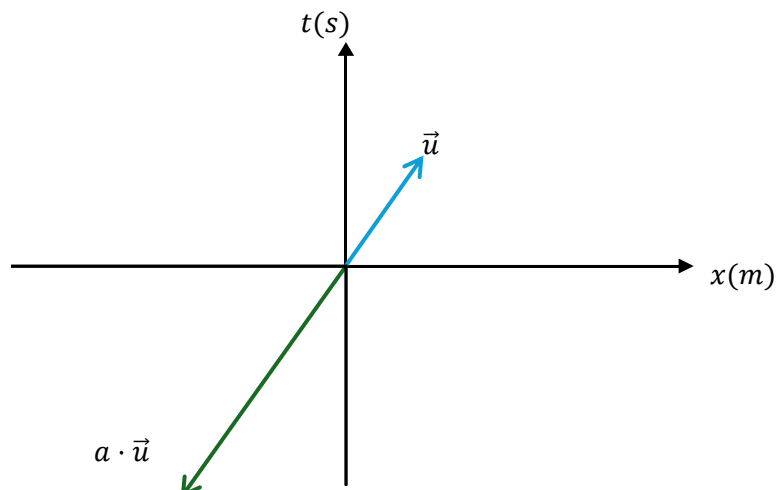
עבור סקלר חיובי הגדול מן 1, הווקטור יתארך.



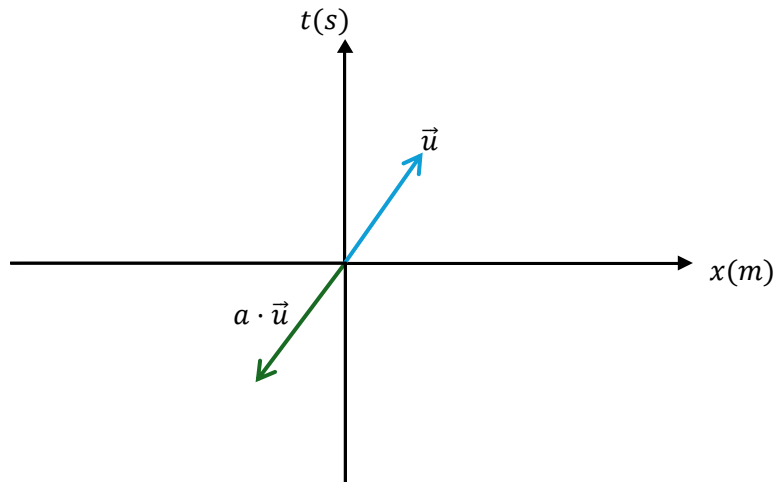
עבור סקלר חיובי הקטן מן 1, הווקטור יתקצר.



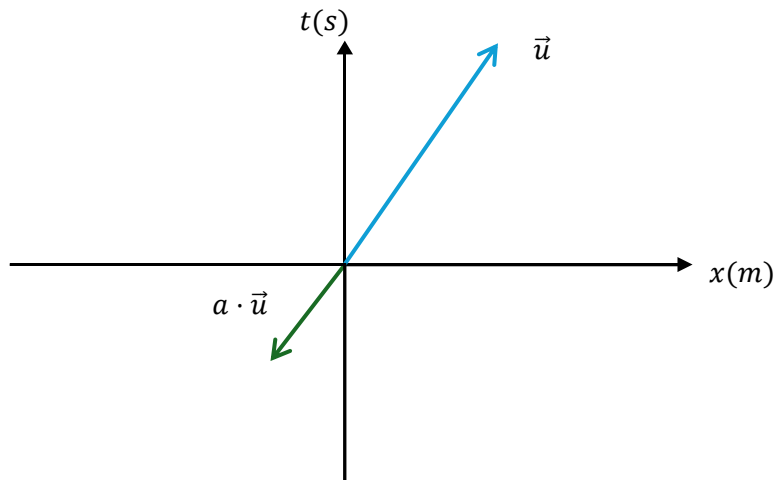
עבור סקלר שלילי הקטן מן -1, הווקטור יתהפך ויתארך לכיוון הנגדי.



עבור סקלר 1-, הווקטור פשוט יהפוך את כיוונו ויתהפך. ללא שינוי בגודל הווקטור. (וקטור נגדי)



עבור סקלר הקטן מן 1-, הווקטור יתהפך ויתקצר לכיוון הנגדי.



! כפל בסקלר 1 חסר כל השפעה על הווקטור.

!! כפל בסקלר 0 משנה את הווקטור להתלכד עם הציר האופקי.

הגדרה אלגברית: יהי הווקטור $\vec{u} = (x_1, y_1)$ והסקלר a . הווקטור $a \cdot \vec{u}$ יהיה מורכב מן הרכיבים הקרטזיים $(a \cdot x_1, a \cdot y_1)$.

לדוגמה, הווקטור $(12, 3) \cdot 5$ הוא הווקטור $(60, 15)$.

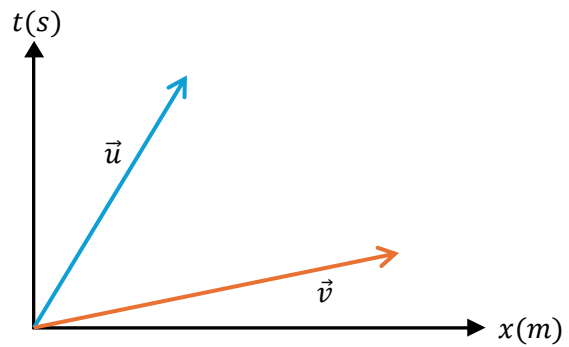
! גם פה, הפעולה מתבצעת בצורה אלגברית ישירות על וקטור המיוצג קרטזית. על מנת לבחון את הרכיבים האלגבריים של כפל בסקלר עם וקטור המיוצג פולארית, יש לבצע המרה כנלמד.

חיסור וקטורים:

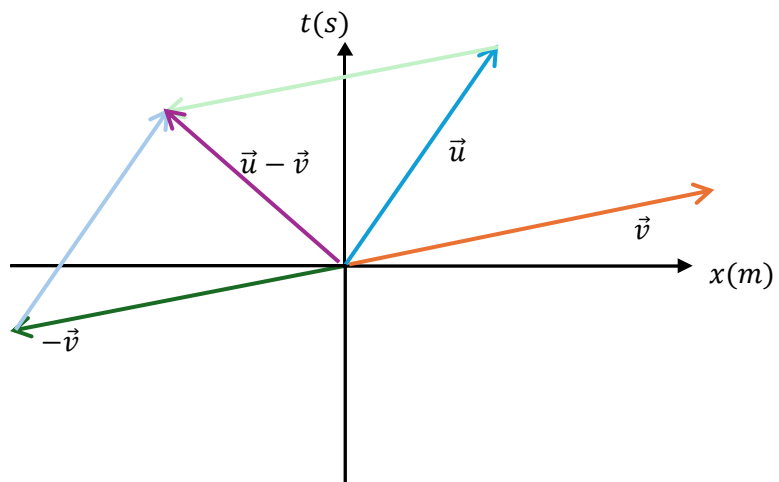
למעשה, ניתן להגדיר חיסור וקטורים בעזרת הפעולות הקודמות שהגדרנו:

הגדרה: יהיו $\vec{u}$, $\vec{v}$ שני וקטורים. וקטור ההפרש $\vec{u} - \vec{v}$ הוא חיבור הווקטור $\vec{u}$ עם הווקטור הנגדי (כפל בסקלר -1) של הווקטור $\vec{v}$. במילים אחרות, מתקיים: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1 \cdot \vec{v})$.

דוגמה גרפית:



נשרטט את הווקטור הנגדי של $\vec{v}$, ונחבר אותו עם הווקטור $-\vec{v}$:



דוגמה אלגברית:

$$(5,4) - (2,4) = (3,0)$$

הרחבה: אופרטור הסכום $\sum$:

כאשר אנחנו מעוניינים למצוא וקטור שקול לכמה וקטורים (למשל עבור n וקטורים), עלינו לחבר אותם באחד אחרי השני לקבלת וקטור סכום מלא.

ישנן שתי צורות כתיבה לפעולה:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n$$

אך בעזרת אופרטור הסיגמא הגדולה $\sum$, ניתן לקצר את הכתיבה:

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}_i$$

אם נתרגם את הנאמר: לכל המספרים מ-1 עד n , תוסיף לסכום את ערכי הווקטור הנוכחי $(1,2,3,\dots,n)$.

לדוגמה, עבור הווקטורים $\vec{v}_1 = (1,3)$, $\vec{v}_2 = (-3,7)$, $\vec{v}_3 = (2,4)$ ניתן לייצג את הסכום כך:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{v}_i = (1,3) + (-3,7) + (2,4) = (0,14)$$