סיכום - חשבון אינטגרלי (אינטגרלים) למיקוד 2026 שאלון 571

האינטגרל הבלתי מסוים

האינטגרל הוא הפעולה ההפוכה לפעולת הגזירה. כך מסומן אינטגרל **בלתי מסוים:**

$$\int f(x)dx$$

הסימן ∫ נקרא סימן האינטגרל, ומזכיר את האות S (בהקשר של שטחים... הקשר עליו נדון בהמשך..)

הפונקציה $f(x)$ נקראת האינטגרנד: הפונקציה עליה מפעילים את פעולת האינטגרל.

הביטוי dx נקרא הדיפרנציאל: הוא מסמן מתי האינטגרל מסתיים, ובעבור איזה משתנה אנו מבצעים את הפעולה.

מה הכוונה?

נגדיר את הפונקציה $y = 5tx + 4t$. אם נתבקש לגזור את הפונקציה, מבלי לקבל שום מידע מלבד משוואתה, ניכשל, שכן אנו לא יודעים מי המשתנה? x או t?

אם המשתנה הוא x, הנגזרת תהיה $y' = 5t$. אם המשתנה הוא t הנגזרת תהיה $y' = 5x + 4$.

לכן הסימון dx אומר לנו: האינטגרל הוא בעבור פונקציה של x.

נאמר כי האינטגרל הוא הפעולה ההפוכה לפעולת הגזירה. המשמעות היא שאם נגזור את הפונקציה F(x) ונקבל את הנגזרת f(x): אם נבצע אינטגרל לפונקציה f(x) נקבל את הפונקציה F(x).

לדוגמה:

נגזרת של $y = x^2 + 2x + 3$: $y' = 2x + 2$.

לכן האינטגרל של $y' = 2x + 2$ הוא $y = x^2 + 2x + 3$

נשים לב שהנגזרת של מספר קבוע (לדוג׳: 1,0,-5,0.3333) הוא 0. לכן כאשר אני מוצא אינטגרל אני צריך להתחשב בכך שהוא עשוי היה להכיל במקור מספר קבוע. מכאן נגדיר **אינטגרל בלתי מסוים:**

תהי $f(x)$ פונקציה כלשהי. אומרים שהאינטגרל המסוים של $f(x)$ הוא $\int f(x)dx$, והוא שווה ל<u>פונקציה הקדומה</u> של $f(x)$ המסומנת $F(x)$ המקיימת: $F'(x) = f(x)$. במילים אחרות:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

כאשר C קבוע כלשהו.

נכיר כללי מפתח לחישוב האינטגרל:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ לכל $n \neq -1$.

2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

4) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

5) תת מקרה של חוק 1 וחוק 3: $\int k\, dx = kx + C$ כאשר k מספר קבוע כלשהו.

נראה דוגמאות מגוונות:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

$$\int [x^3 + 2x]dx = \int x^3 dx + \int 2x dx = \int x^3 dx + 2\int x dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] + C$$
$$= \frac{x^4}{4} + x^2 + C$$

$$\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx = \int (2x+3)^{-2} dx = \frac{(2x+3)^{-2+1}}{2 * (-2+1)} + C = \frac{(2x+3)^{-1}}{-2} + C = \frac{1}{-2(2x+3)} + C$$
$$= \frac{1}{-4x-6} + C$$

$$\int \frac{2x^2+5}{4x^2} dx = \int \frac{2x^2}{4x^2} dx + \int \frac{5}{4x^2} dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 1 dx + \frac{5}{4}\int x^{-2} dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{5}{4x} + C$$

אינטגרלים המכילים פונקציה ונגזרתה:

כאשר אנו רואים אינטגרל כגון $\int f(x)f'(x)dx$ או $\int f^{10}(x)(5f'(x)+3)^2\,dx$ נרצה לבנות כמה כללים:

$$\int f^n(x)f'(x)dx\,,n\neq -1$$

נציב $t=f(x)$ ואם נגזור את שני האגפים נקבל $dt=f'(x)dx$. נציב באינטגרל שלנו:

$$\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+\ C$$

וקיבלנו שלכל $f(x), n\neq -1$:

$$\int f^n(x)f'(x)dx=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+\ C$$

נראה דוגמאות:

$$\int 10x^4(2x^5-6)^3dx$$

נסמן $t=2x^5-6$. נגזור את שני האגפים ונקבל $dt=10x^4dx$. נציב חזרה באינטגרל:

$$\int 10x^4(2x^5-6)^3dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(2x^5-\ 6)^4}{4}+\ C$$

אך ניתן גם להיעזר בכלל שהוכחנו:

$$\int \underbrace{10x^4}_{f'}\underbrace{(2x^5-6)}_{f}{}^3dx=\frac{(2x^5-6)^4}{4}+C$$

דוגמה לשאלה על הפונקציה הקדומה והאינטגרל הבלתי מסוים:

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$. לפונקציה משיק ששיפועו -3, המשיק לפונקציה בנקודה בה $y = 7$. מצאו את $f(x)$.

פתרון:

על מנת לחזור מהנגזרת לפונקציה המקורית, נפעיל אינטגרל על הנגזרת:

$$\int f'(x)dx = \int [2x - 3]dx = 2\int xdx - 3\int 1dx = x^2 - 3x + C$$

קיבלנו שהפונקציה $f(x)$ היא מהצורה: $f(x) = x^2 - 3x + C$. ניעזר בנתוני המשיק כדי למצוא את C:

נמצא מהו השיעור ה-x עבורו ערך הנגזרת הוא 3-:

$$2x - 3 = -3$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

כלומר נקודת ההשקה **שעל הפונקציה** $\boldsymbol{f(x)}$ היא $(0,7)$. נציב:

$$f(0) = 7$$
$$0^2 - 3 \cdot 0 + C = 7$$
$$C = 7$$

ולכן הפונקציה היא $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 7}$.

<u>האינטגרל המסוים</u>

כשלמדנו על נגזרת הכרנו את המשמעות הגרפית שלה: הנגזרת בנקודה $x = a$ היא שיפוע הפונקציה בנקודה $x = a$.

על מנת להבין את המשמעות הגרפית של האינטגרל, נצטרך להתעמק **באינטגרל המסוים:**

תהי $f(x)$ פונקציה כלשהי והקדומה שלה $F(x)$, כלומר:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

האינטגרל המסוים של $f(x)$ בתחום $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$ מסומן $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ ומוגדר באופן הבא:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)}$$

דוגמה:

$$\int_2^{10} \frac{2x+5}{2x^3} dx$$

נמצא את הפונקציה הקדומה:

$$\int \frac{2x+5}{2x^3} dx = \int \frac{2x}{2x^3} dx + \int \frac{5}{2x^3} dx = \int x^{-2} dx + \frac{5}{2}\int x^{-3} dx = -\frac{1}{x} - \frac{5}{4x^2} + C$$

כעת נוכל למצוא את האינטגרל המסוים. מכיוון ש-$C - C = 0$ לכל C, אפשר לוותר על כתיבת הקבוע בחישוב האינטגרל המסוים:

$$\int_2^{10} \frac{2x+5}{2x^3} dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{5}{4x^2}\right]|_2^{10} = -\frac{1}{10} - \frac{5}{400} + \frac{1}{2} + \frac{5}{16} = \boldsymbol{\frac{7}{10}}$$

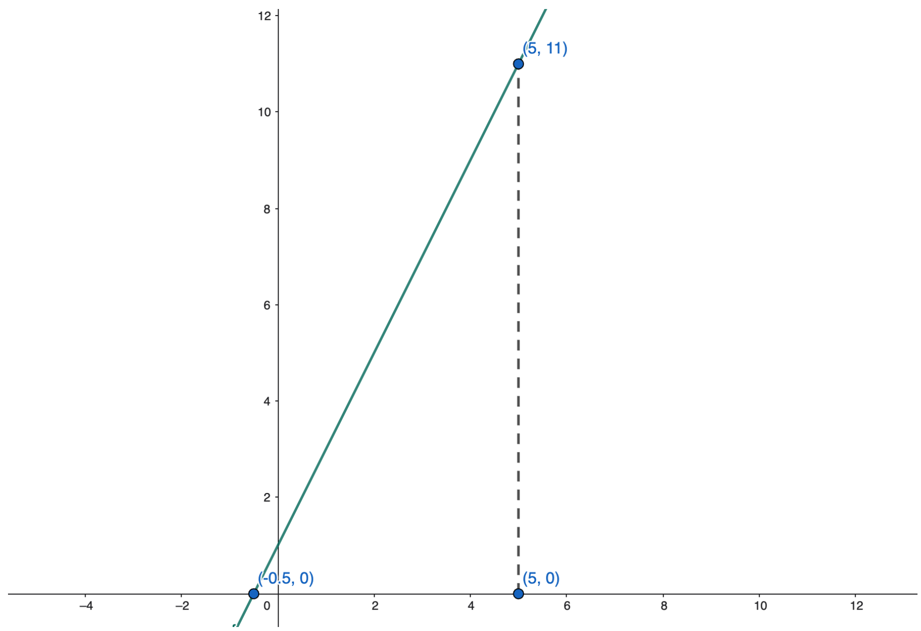
והאינטגרל המסוים הוא $\boldsymbol{\frac{7}{10}}$.

אינטואיציה למשמעות הגרפית של האינטגרל המסוים:

נראה את הקשר מתוך דוגמה:

$$f(x) = 2x + 1$$

נחשב את השטח בין $f(x)$ לבין ציר ה-x בתחום $-0.5 \leq x \leq 5$. כלומר:



נרצה לחשב את שטח המשולש הנוצר לנו עם ציר ה-x ועם הפונקציה.

בסיס = 5.5 יח׳

גובה = 11 יח׳

שטח המשולש: $S = \frac{5.5*11}{2} =$ 30.25 יח״ר.

כעת נחשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.5 \leq x \leq 5$:

$$\int_{-0.5}^{5} [2x+1]dx = [x^2 + x]|_{-0.5}^{5} = 5^2 + 5 - (0.5)^2 + 0.5 = 30.25$$

מזהים את הקשר?

המשמעות הגרפית הפורמלית של האינטגרל המסוים:

תהי $f(x)$ פונקציה כלשהי, והפונקציה הקדומה שלה היא $F(x)$, כלומר

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

השטח הכלוא בין $f(x)$ לבין ציר ה-x בתחום $a \le x \le b$ הוא האינטגרל המסוים של $f(x)$ מ-a ל-b.

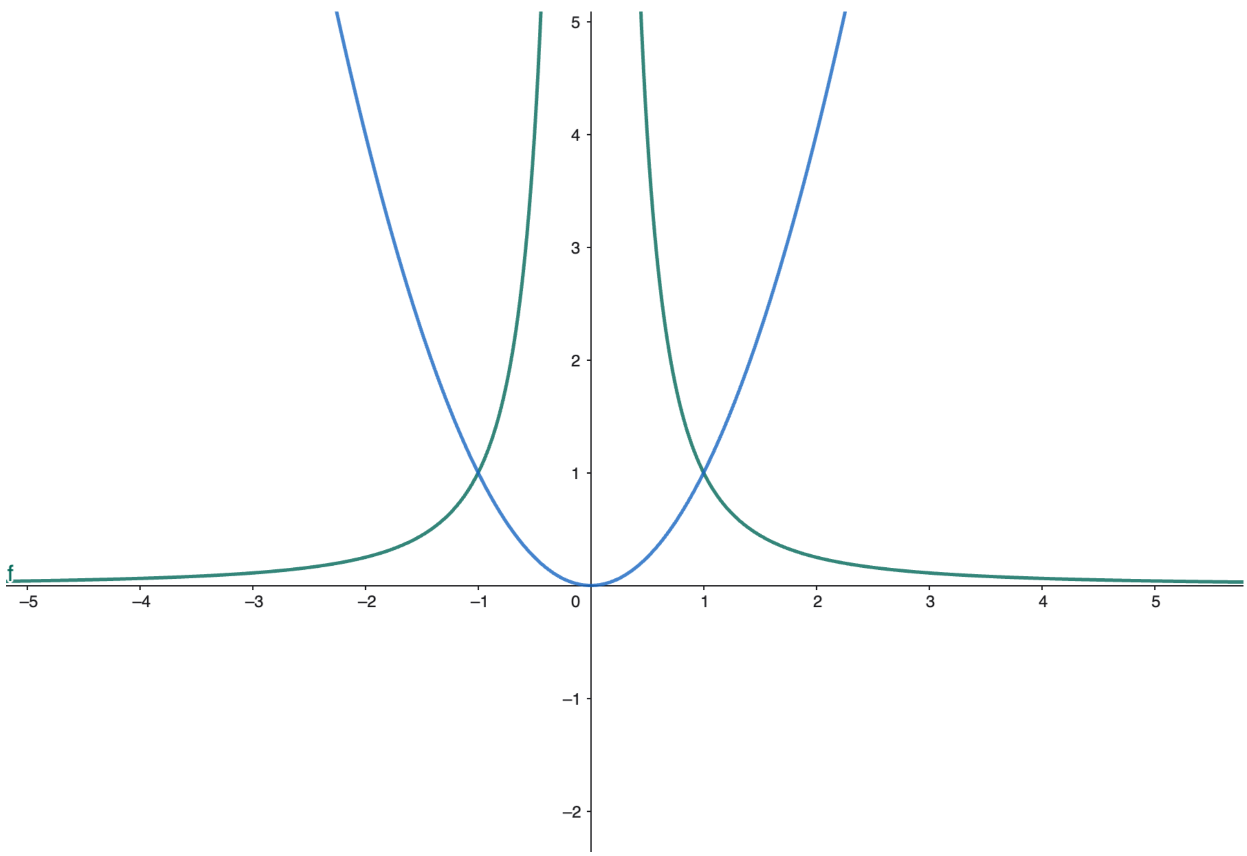
כלומר:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

אבל מכאן עולה השאלה: מה נעשה כאשר אנחנו רוצים שטח בין שתי פונקציות?

נראה דוגמה:

נרצה לחשב את השטח הכלוא בין הפונקציות $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = \frac{1}{x^2}$ בתחום $1 \le x \le 5$:



נשים לב שבתחום $1 \le x \le 5$ מתקיים $f(x) \ge g(x)$. נרצה לחשב את האינטגרל המסוים בתחום זה עבור הפונקציה הגדולה יותר פחות הפונקציה הקטנה יותר. כלומר:

$$S = \int_1^5 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx = \frac{123}{3} - \frac{4}{5} = \frac{608}{15}$$

מכאן כי השטח הכלוא בין הגרפים $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x^2}$ בתחום $1 \le x \le 5$ הוא $\frac{608}{15}$ יח״ר.

תהי $f(x), g(x)$ פונקציות כלשהן, והפונקציות הקדומות שלהן הן $F(x), G(x)$ בהתאמה, כלומר

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \int g(x)dx = G(x) + C$$

השטח הכלוא בין גרף $f(x)$ לגרף $g(x)$ בתחום $a \le x \le b$ מוגדר כך:

- אם בתחום $a \le x \le b$ מתקיים $f(x) \ge g(x)$ אזי השטח הוא:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

- אם בתחום $a \le x \le b$ מתקיים $g(x) \ge f(x)$ אזי השטח הוא:

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

- אם בתחום $a \le x \le b$ ישנו c המקיים $a \le c \le b$ ומתקיים כי בתחום $a \le x \le c$, $f(x) \ge g(x)$ ובתחום $c \le x \le b$, $g(x) \ge f(x)$ אזי השטח הוא:

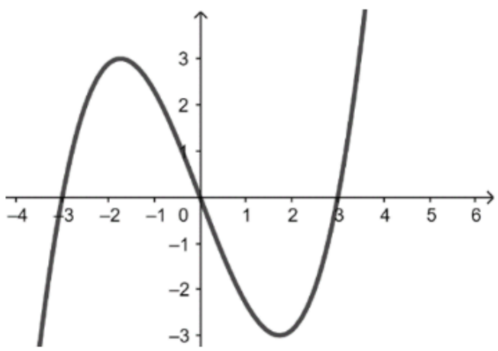
$$\int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx$$

- אם בתחום $a \le x \le b$ ישנו c המקיים $a \le c \le b$ ומתקיים כי בתחום $a \le x \le c$, $f(x) \le g(x)$ ובתחום $c \le x \le b$, $g(x) \le f(x)$ אזי השטח הוא:

$$\int_a^c [g(x) - f(x)]dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]dx$$

הערה: ייתכן ויהיו יותר מנקודת חיתוך אחת בה היחס בין $f(x)$ ל-$g(x)$ משתנה. במקרה זה נמשיך לפצל לעוד אינטגרלים בהתאם להתנהגות הפונקציות בכל תחום.

<u>נפתור תרגילי בגרות אודות חשבון אינטגרלי:</u>



ג. לפניך סרטוט של גרף פונקציה אי זוגית $f(x)$.

(1). קבע אם הטענה הבאה נכונה. נמק.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx > \int_{-2}^{1} f(x)dx$$

(2). מצא a עבורו מתקיים השוויון הבא. נמק.

$$\int_{0}^{4} f(x+a)dx = 0$$

פתרון:

(1) מכיוון שהפונקציה אי זוגית מתקיים $f(-x) = -f(x)$.
נסמן את F(x) כפונקציה הקדומה של $f(x)$, ומכאן F(x) זוגית, כלומר, $F(x) = F(-x)$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-2) = F(2) - F(2) = 0$$

כלומר הטענה היא $\int_{-2}^{1} f(x)dx < 0$. אולם אינטגרל זה מסמל **שטח** - ושטח הוא תמיד אי שלילי, ולכן **<u>הטענה לא נכונה.</u>**

(2) ראינו כבר שהפונקציה הקדומה היא זוגית בשל העובדה כי h'(x) אי זוגית אם ורק אם $h(x)$ זוגית.
מכאן כי ניתן לפרק את האינטגרל לפי הקדומה:

$$\int_{0}^{4} f(x+a)dx = F(4+a) - F(a)$$

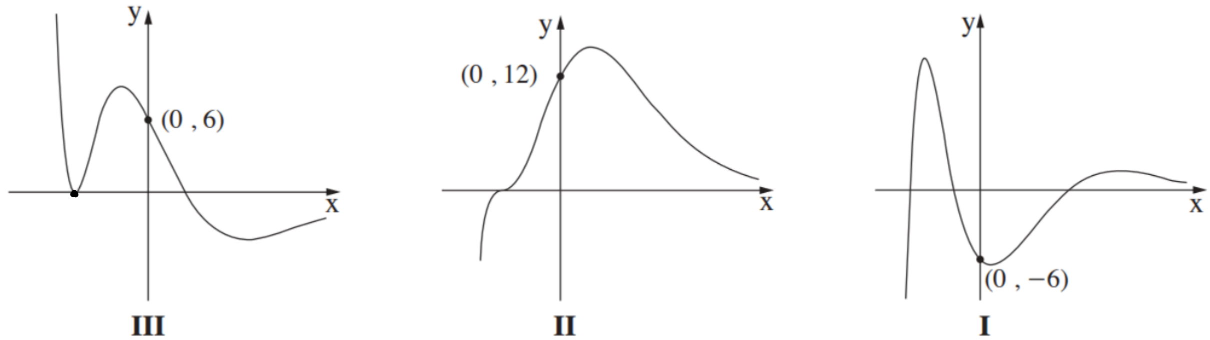
זה שווה לאפס כאשר $4 + a = a$ או $4 + a = -a$. נשים לב שלמשוואה הראשונה אין פתרון, בעוד שפתרון המשוואה השנייה הוא $a = -2$, ולכן השוויון מתקיים עבור $a = -2$.

ג. הפונקציה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x.

לפניכם שלושה גרפים I–III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה־ x.

על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה־ y.



(1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הם $(a , 15)$.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקציה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה־ y.

פתרון:

(1) לגרף II יש נקודת פיתול בתחום השלילי. באותה הנקודה לגרף III יש נקודת השקה לציר ה-x. מכאן כי גרף II מייצג את $f(x)$ וגרף III מייצג את $f'(x)$, ולכן גרף I מייצג את $f''(x)$.

(2) מספר נקודות הפיתול של $f(x)$ כמספר נקודות האפס **משנות הסימן** של $f''(x)$ ולכן לפונקציה $f(x)$ על פי גרף I ישנן 3 נקודות פיתול לפונקציה $f(x)$.

(3) נקודת המקסימום של $f(x)$ היא $(a, 15)$, כלומר בנקודה $x = a$ לפונקציה $f'(x)$ נקודת אפס. ניתן גם מן גרף I להבין כי $a > 0$.

עלינו לחשב את השטח הכלוא בין גרף III לגרף I בתחום $0 \le x \le a$. נשים לב ש-$f'(x) > f''(x)$ בתחום זה. אזי השטח הוא:

$$\int_0^a f'(x) - f''(x)dx = \int_0^a f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx = f(a) - f(0) - f'(a) + f'(0)$$
$$= 15 - 12 - 0 + 6 = 9$$

ולכן השטח הוא 9 יח״ר.