

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

הקדמה - הגדרת הלוגריתם:

יהי $a > 0$ ו- $a \neq 1$ ו- $b > 0$ אז:

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

כלומר, פעולת ה- $\log$ היא הפעולה ההפוכה להעלאה בחזקה. (כמו שפעולת החילוק היא ההפוכה לכפל...).

המספר הקטן בתחתית ה- $\log$ (בדוגמה שלנו, a) הוא בסיס הלוגריתם, כיוון שבמקור מהווה את בסיס החזקה.

המספר שבפנים ה- $\log$ (בדוגמה שלנו, b) הוא תוכן הלוגריתם, ובמקור מהווה את תוצאת החזקה.

השאלה שהלוגריתם עונה עליה היא איזה מעריך יש לבחור, כך שחזקה הבנויה מהבסיס וממנו (אותו מעריך) תחזיר לנו את תוכן הלוגריתם?

דוגמאות:

$$\log_3(27) = 3 \text{ כיוון שהשאלה היא "3 בחזקת מה = 27?" והתשובה היא 3.}$$

$$\log_2(16) = 4 \text{ כיוון שהשאלה היא "2 בחזקת מה = 16?" והתשובה היא 4.}$$

$$\log_4(1) = 0 \text{ כיוון שהשאלה היא "4 בחזקת מה = 1?" והתשובה היא 0.}$$

$$\log_{12}(12) = 1 \text{ כיוון שהשאלה היא "12 בחזקת מה = 12?" והתשובה היא 1.}$$

הערה: כאשר אין בסיס חד משמעי - מדובר כברירת מחדל בבסיס 10.

בעזרת הגדרת הלוגריתם נפתור משוואות לוגריתמיות פשוטות. ראו דוגמאות הבאות:

1. $\log_4(x) = 3$. ראשית נזכור שתחום ההגדרה של x הוא $x > 0$. על פי הגדרה: $x = 4^3 = 64$. הפתרון בתחום ההגדרה ולכן הוא פתרון המשוואה.

2. $\log_x(8) = 3$. ראשית נזכור שתחום ההגדרה של x הוא $x > 0$ ו- $x \neq 1$. על פי הגדרה: $x^3 = 8$ ולכן מתקבל $x = 2$. הפתרון בתחום ההגדרה ולכן הוא פתרון המשוואה.

3. $\log_5 125 = x$. נקבל $5^x = 125$ שזו משוואה מעריכית פשוטה: $5^x = 125 = 5^3$ ולכן $x = 3$. אפשר להגיד בצורה פשוטה יותר שערך הלוגריתם $\log_5(125)$ הוא 3 - כפי שהראינו עבור מספרים שונים קודם לכן.

לא תמיד נקבל משוואות לוגריתמיות פשוטות, אלא נצטרך לסדר אותן בצורה אלגברית בעזרת חוקי לוגריתמים.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

חוקי לוגריתמים:

$$b, c > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad 1. \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad 2.$$

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b \quad 3. \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad 4. \quad \text{עבור } c \neq 1$$

פתרון משוואות לוגריתמיות מורכבות:

בפתרון משוואות לוגריתמיות נשאף להגיע למצב שהלוגריתם מבודד באגף אחד, ככה שאפשר על פי הגדרה להיפטר ממנו. עבור משוואות עם תחום הגדרה פשוט למציאה, נכתוב תחילה את תחום ההגדרה ובסוף נוודא שהוא מכיל את הפתרונות שהתקבלו. במידה ומדובר בתחום הגדרה מורכב, נציב במשוואה המקורית את הפתרונות שקיבלנו ונוודא שאכן האגפים שקולים.

ראו את הדוגמאות הבאות:

1.

$$\log_x(x^2 - 6x + 12) = 2$$

תחום הגדרה:

$$x > 0, x \neq 1, x^2 - 6x + 12 > 0$$

$$x > 0, x \neq 1$$

על פי הגדרה:

$$x^2 = x^2 - 6x + 12$$

$$-6x + 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

2.

$$\sqrt{1 - \log_3 x} \cdot \log_x 3 = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{1 - \log_3 x} \cdot \frac{\log_3(3)}{\log_3(x)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{1 - \log_3 x}}{\log_3(x)} = \frac{2}{3}$$

נציב $t = \log_3 x$:

$$3\sqrt{1 - t} = 2t$$

$$9(1 - t) = 4t^2$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

$$4t^2 + 9t - 9 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{3}{4}, -3$$

נציב חזרה :

$$\log_3 x = \frac{3}{4} \rightarrow x = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}, \quad \log_3 x = -3 \rightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

נציב חזרה במשוואה לבדיקה :

$$1) \sqrt{1 - \log_3 \left(3^{\frac{3}{4}}\right)} \log_{\frac{3}{4}} 3 = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2) \sqrt{1 - \log_3(3^{-3})} \log_{3^{-3}} 3 = \sqrt{1 - (-3)} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \neq \frac{2}{3}$$

ולכן נשארנו עם פתרון יחיד $x = \frac{1}{27}$.

$$3 \log_2 \left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad .3$$

$$\log_2 \left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 4 + \frac{2}{3}x$$

$$2^{4+\frac{2}{3}x} = 3 \cdot 2^{2+\frac{2}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3$$

$$\left(2^{\frac{x}{3}}\right)^2 \cdot 2^4 = 3 \cdot \left(2^{\frac{x}{3}}\right)^2 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3$$

נציב $t = 2^{\frac{x}{3}}$:

$$16t^2 = 12t^2 = 11t + 3$$

$$4t^2 - 11t - 3 = 0$$

$$t = 3, t = -\frac{1}{4}$$

$$2^{\frac{x}{3}} = 3, \quad 2^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{3} = \log_2 3 \rightarrow x = 3 \log_2 3, \quad \frac{x}{3} = -2 \rightarrow x = -6$$

נבדוק את הפתרונות :

$$1) 3 \log_2 (3 \cdot 4^{1+\log_2 3} - 11 \cdot 2^{\log_2 3} + 3) = 3 \log_2 (3 \cdot 4 \cdot 9 - 11 \cdot 3 + 3) = 3 \log_2 (78) \\ \neq 12 + 6 \log_2 3$$

$$2) \log_2 (3 \cdot 4^{1-2} - 11 \cdot 2^{-2} + 3) = \log_2 (3 \cdot 4^{-1} - 11 \cdot 4^{-1} + 3) = 0 = 12 - 12 = 0$$

כלומר, $x = -6$.

$$\log_2(\log_x(16)) - \log_2(\log_4(x)) = 3$$

תחום הגדרה: $x > 0$ וגם $x \neq 1$.

$$\log_2\left(\frac{\log_4(16)}{\log_4(x)}\right) - \log_2(\log_4(x)) = 3$$

$$\log_2\left(\frac{2}{\log_4(x)}\right) - \log_2(\log_4(x)) = 3?$$

$$\log_2\left(\frac{2}{(\log_4(x))^2}\right) = 3$$

$$2^3 = \frac{2}{(\log_4(x))^2}$$

$$\frac{1}{(\log_4(x))^2} = 4$$

$$\log_4(x) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\log_4(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2$$

$$\log_4(x) = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

אי שוויונים לוגריתמיים:

יהי $1 \neq a > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

א. אם $a > 1$:

- $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 > x_2$.

- $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 < x_2$.

- $\log_a(x_1) \geq \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 \geq x_2$.

- $\log_a(x_1) \leq \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 \leq x_2$.

- $\log_a(x_1) > x_2$ אם ורק אם $x_1 > a^{x_2}$.

- $\log_a(x_1) < x_2$ אם ורק אם $x_1 < a^{x_2}$.

- $\log_a(x_1) \geq x_2$ אם ורק אם $x_1 \geq a^{x_2}$.

- $\log_a(x_1) \leq x_2$ אם ורק אם $x_1 \leq a^{x_2}$.

ב. אם $0 < a < 1$:

- $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 < x_2$.

- $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 > x_2$.

- $\log_a(x_1) \geq \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 \leq x_2$.

- $\log_a(x_1) \leq \log_a(x_2)$ אם ורק אם $x_1 \geq x_2$.

- $\log_a(x_1) > x_2$ אם ורק אם $x_1 < a^{x_2}$.

- $\log_a(x_1) < x_2$ אם ורק אם $x_1 > a^{x_2}$.

- $\log_a(x_1) \geq x_2$ אם ורק אם $x_1 \leq a^{x_2}$.

- $\log_a(x_1) \leq x_2$ אם ורק אם $x_1 \geq a^{x_2}$.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

דוגמאות:

1.

$$\log_2(x) > 3$$

תחום הגדרה: $x > 0$

$$x > 2^3 = 8$$

$$x > 8$$

2.

$$\log_3(9x) + \log_{27}(3x) \leq 5$$

תחום הגדרה: $x > 0$

$$\log_3(9) + \log_3(x) + \log_{27}(3) + \log_{27}(x) \leq 5$$

$$2 + \log_3(x) + \frac{1}{3} + \log_{27}(x) \leq 5$$

$$\log_3(x) + \frac{\log_3(x)}{\log_3(27)} \leq 3 - \frac{1}{3}$$

$$3 \log_3(x) + \log_3(x) \leq 8$$

$$4 \log_3(x) \leq 8$$

$$\log_3(x) \leq 2$$

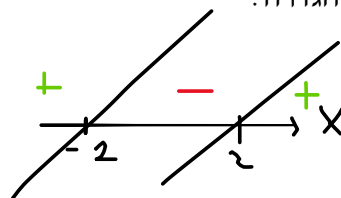
$$x \leq 3^2 = 9$$

$$0 < x \leq 9$$

$$\log_{0.5}(8-x) \leq \log_2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

תחום הגדרה:

$$\begin{aligned} 8-x > 0 \text{ וגם } \frac{x-2}{x+2} > 0 \\ x < 8 \text{ וגם } (x < -2 \text{ או } x > 2) \\ x < -2 \text{ או } 2 < x < 8 \end{aligned}$$



$$\frac{\log_2(8-x)}{\log_2(0.5)} \leq \log_2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

$$-\log_2(8-x) \leq \log_2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

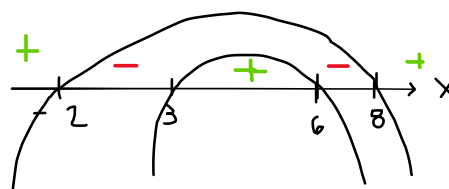
$$\log_2\left(\frac{1}{8-x}\right) \leq \log_2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

$$\frac{1}{8-x} \leq \frac{x-2}{x+2}$$

$$\frac{(x-2)(8-x) - (x+2)}{(8-x)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{8x - x^2 - 16 + 2x - x - 2}{(8-x)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + 9x - 18}{(8-x)(x+2)} \geq 0$$



$$x < -2 \text{ או } 3 \leq x \leq 6 \text{ או } x > 8$$

$$x < -2 \text{ או } 3 \leq x \leq 6$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{3}\right) \cdot \log_x 3$$

תחום הגדרה: $x > 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\log_3(3x)}{\log_3\left(\frac{1}{3}\right)} &\leq \frac{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)}{\log_3\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot \frac{\log_3(3)}{\log_3(x)} \\ \log_3(3x) &\geq \frac{\log_3\left(\frac{x}{3}\right)}{\log_3(x)} \\ \log_3(3) + \log_3(x) &\geq \frac{\log_3\left(\frac{1}{3}\right) + \log_3(x)}{\log_3(x)} \\ 1 + \log_3(x) &\geq \frac{\log_3(x) - 1}{\log_3(x)} \end{aligned}$$

הצבה: $t = \log_3(x)$:

$$\begin{aligned} 1 + t &\geq \frac{t - 1}{t} \\ \frac{t - 1 - t^2 - t}{t} &\leq 0 \\ \frac{t^2 + 1}{t} &\geq 0 \\ t &> 0 \\ \log_3(x) &> 0 \\ x &> 3^0 = 1 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

קבוע אוילר והלוגריתם הטבעי ($\ln$):

כפי ש- π הוא קבוע בעל חשיבות רבה בעולם ההנדסה והגיאומטריה, בעולם החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי יש קבוע חשוב נוסף - $e \approx 2.718$, הנקרא גם קבוע אוילר, ע"ש המתמטיקאי לאונרד אוילר.

לפניכם מספר דוגמאות לחשיבות של e בעולם המתמטי - אין ממה לחשוש אם חלק מהדברים אינם מובנים, העיקר שחשיבותו של e מחלחלת בכם:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \cos(\alpha) + \sin(\alpha) i &= e^{i\alpha} \\ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots &\approx e^x\end{aligned}$$

ראינו שכל מספר חיובי שאינו אחד יכול לשמש כבסיס ללוגריתם. בפרט, e הוא בסיס מפורסם ושימושי ללוגריתם, שנקרא גם "הלוגריתם הטבעי" - $\log_e x$, אשר בקיצור נפוץ מסומן $\ln(x)$.

דוגמאות:

$$\ln(1) = 0, \ln(e) = 1, \ln(e^2) = 2, \dots, \ln(e^k) = k$$

כאשר אנחנו נרצה לפתור משוואה מהסוג $e^x = a$, אם a לא מהווה חזקה "יפה" (עם מעריך רציונלי) של e , נשאיר את הפתרון להיות $x = \ln(a)$.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

הגדרה וחקירה בסיסית של פונקציה לוגריתמית:

הפונקציה $f(x) = \log_a(x)$ עבור $a > 0$, $a \neq 1$ כלשהו נקראת גם פונקציה לוגריתמית.

תחום ההגדרה: תוכן הלוגריתם חייב להיות חיובי, ולכן $x > 0$.

נקודות חיתוך עם הצירים:

מכיוון ש-0 לא בתחום ההגדרה, אין חיתוך עם ציר ה-y.

$$\log_a(x) = 0$$

$$x = a^0 = 1$$

$$(1,0)$$

שימו לב - קיבלנו נקודה קבועה לכל פונקציה לוגריתמית $f(x) = \log_a x$ בה $a > 0$, $a \neq 1$ - $(1,0)$.

תחומי חיוביות ושליליות:

אם $a > 1$, תחום החיוביות הוא $x > a^0 = 1$ ותחום השליליות הוא $0 < x < 1$.

אם $0 < a < 1$, תחום החיוביות הוא $0 < x < 1$ ותחום השליליות הוא $x > 1$.

אסימפטוטות:

אם $a > 1$ אנחנו בעצם שואלים "בחזקת מה יהיה x". כלומר, אם נבחר $x \rightarrow 0^+$ אנחנו נשאל עבור איזה מעריך של a, החזקה מתקרבת יותר לאפס? התשובה תהיה עבור מעריך ששואף ל- $(-\infty)$. לכן, לפונקציה אסימפטוטה אנכית $x = 0$.

אם $0 < a < 1$ השאלה לא משתנה, אבל התשובה משתנה, כיוון שחזקה של מספר קטן מ-1 תלך ותקטן ככל שהמעריך יגדל. לכן התשובה תהיה עבור מעריך ששואף ל- (∞) . לכן, לפונקציה אסימפטוטה אנכית $x = 0$.

שורה תחתונה: לכל $a > 0$, $a \neq 1$, לפונקציה $f(x) = \log_a(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = 0$.

נבדוק מה קורה לפונקציה בסביבת האינסוף $(x \rightarrow \infty)$:

השאלה שקולה להיות "עבור איזה מעריך של a החזקה שואפת לאינסוף?"

עבור $a > 1$ התשובה היא ∞ ואין אסימפטוטה אופקית באינסוף.

עבור $0 < a < 1$ התשובה היא 0, ולכן האסימפטוטה האופקית באינסוף היא $y_\infty = 0$.

אין צורך לשאול מה קורה ב- $-\infty$ מכיוון שתחום ההגדרה הוא $x > 0$. לכן אין אסימפטוטה אופקית נוספת.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

תחומי עלייה וירידה:

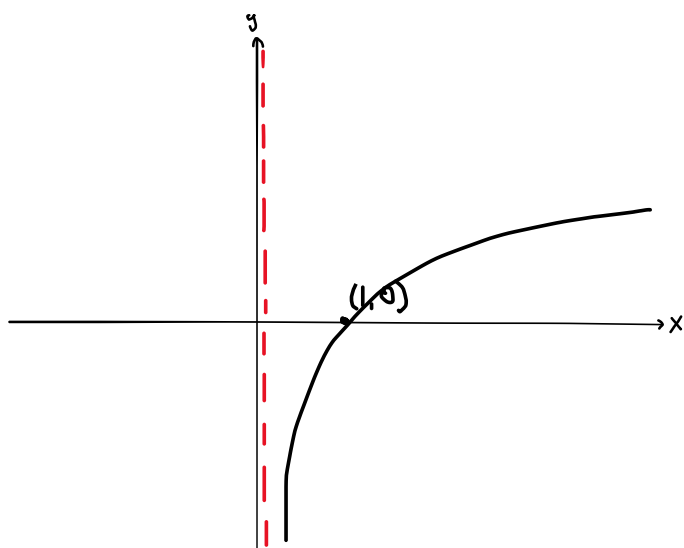
נשאל: "עבור איזה מעריך של a , החזקה תלך ותגדל?"

עבור $a > 1$ התשובה תהיה ככל שהמעריך גדל - ולכן תחום העלייה של הפונקציה יהיה כל תחום ההגדרה, $x > 0$, ותחום הירידה יהיה אף x .

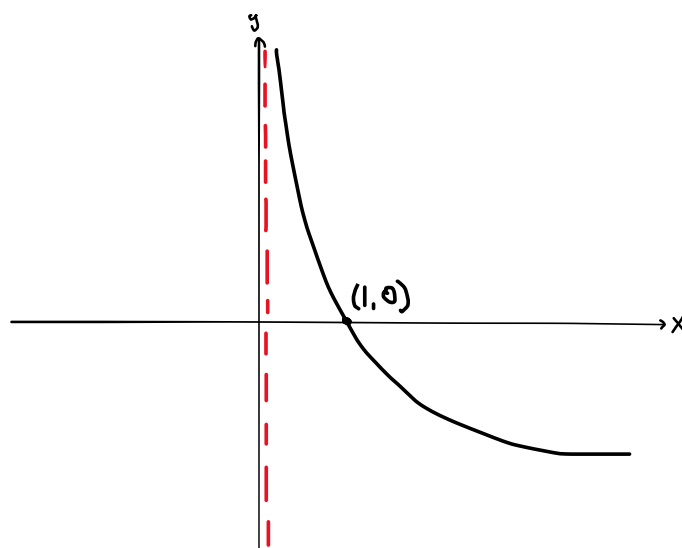
עבור $0 < a < 1$ התשובה תהיה ככל שהמעריך קטן, ולכן תחום העלייה של הפונקציה יהיה אף x , ותחום הירידה יהיה כל תחום ההגדרה, $x > 0$.

סקיצה (גסה):

עבור $a > 1$:



עבור $0 < a < 1$:



סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

נגזרתה של הפונקציה הלוגריתמית:

יהי $a > 0$ כלשהו ומגדירים פונקציה $f(x) = \log_a x$.

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

כאשר $\ln(a)$ הוא הלוגריתם הטבעי (על בסיס e) של a .

דוגמאות:

$$(\log_2(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(2)}, \quad (\log(x))' = \frac{1}{x \ln(10)},$$

$$(\log_4(2x^2 + 3x + 5))' = \frac{4x + 3}{(2x^2 + 3x + 5) \cdot \ln(4)}$$

שאלה מעניינת - מה הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \ln(x)$?

נזכור ש- $\ln(x) = \log_e(x)$. נציב:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(e)} = \frac{1}{x}$$

כלומר, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

תרגיל חקירה מלאה כולל סעיפי גזירה וחשיבה (ללא חשבון אינטגרלי):

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$$g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$$

- ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

א. (1). $x > 0$ וגם $1 + \ln(x) \neq 0$. נפתור את המשוואה:

$$\ln(x) \neq -1$$

$$x \neq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

כלומר תחום ההגדרה הוא $x > \frac{1}{e}$ או $0 < x < \frac{1}{e}$.

(2). נחשוד בנקודות $x = 0, \frac{1}{e}$. נראה מה קורה בסביבת האפס:

$$f(0.0001) = 0.000011$$

$$f(0.0000001) = 0.000000106$$

כלומר, כאשר מתקרבים ל-0, הפונקציה מתקרבת גם כן ל-0, ולכן $x = 0$ אינה אסימפטוטה אנכית אלא "חור" $(0,0)$.

משיקולי פונקציית מנה נשים לב שעבור $x = \frac{1}{e}$ המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס, כלומר $x = \frac{1}{e}$ אסימפטוטה אנכית.

(3).

$$\frac{x \ln(x)}{1 + \ln(x)} = 0 \rightarrow x \ln(x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ או } \ln(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

נשים לב שרק $x = 1$ בתחום ההגדרה, ולכן $(1,0)$ היא נקודת החיתוך עם ציר ה- x .

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

ב.

$$f'(x) = \frac{\left(\left(\ln(x) + \frac{x}{x} \right) (1 + \ln(x)) - \frac{1}{x} (x \ln(x)) \right)}{(1 + \ln(x))^2}$$

$$= \frac{(1 + \ln(x))^2 - \ln(x)}{(1 + \ln(x))^2}$$

נמצא האם יש מאפסים :

$$(1 + \ln(x))^2 - \ln(x) = 0$$

נציב $t = \ln(x)$

$$(1 + t)^2 - t = 0$$

$$1 + 2t + t^2 - t = 0$$

$$t^2 + t + 1 = 0$$

$$\emptyset$$

כלומר, אין מאפסים - אין נקודות קיצון.

נציב בתחום $0 < x < \frac{1}{e}$ את הנקודה $\frac{1}{e^2}$:

$$f'\left(\frac{1}{e^2}\right) = f'(e^{-2}) = \frac{(1 + (-2))^2 - (-2)}{(1 + (-2))^2} = \frac{1 + 2}{1} = 3 > 0$$

מכאן כי בתחום $0 < x < \frac{1}{e}$ הפונקציה $f(x)$ עולה.

נציב בתחום $x > \frac{1}{e}$ את הנקודה e :

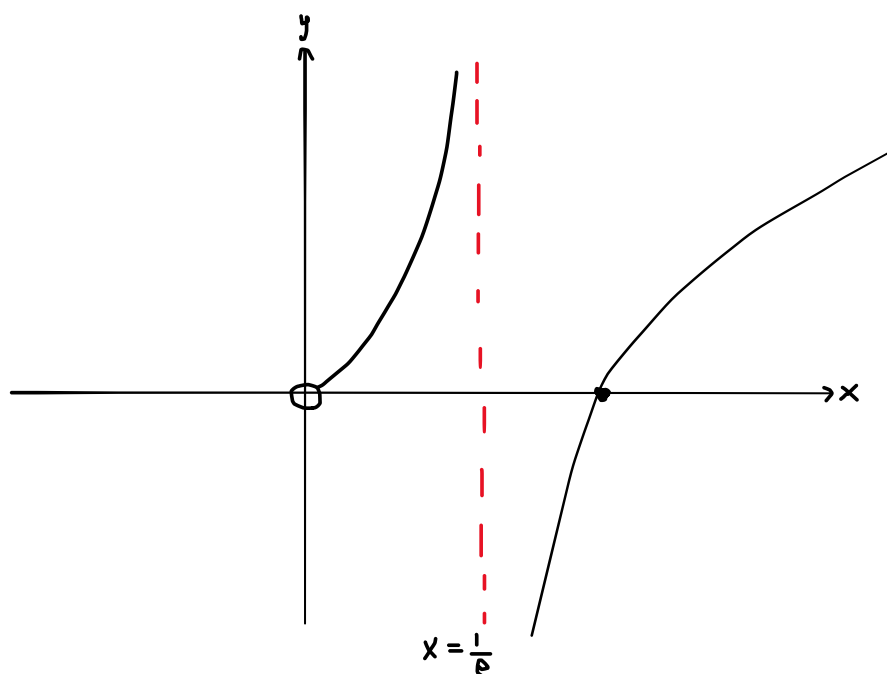
$$f'(e) = \frac{(1 + 1)^2 - 1}{(1 + 1)^2} = \frac{3}{4} > 0$$

מכאן כי גם בתחום $x > \frac{1}{e}$ הפונקציה $f(x)$ עולה.

כלומר, תחום העלייה של הפונקציה הוא $x > \frac{1}{e}$ או $0 < x < \frac{1}{e}$ ותחום הירידה הוא אף x .

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

ג. סקיצה:



ד(1). נשים לב שהפונקציה $g(x)$ היא בעצם הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ בצורה בלתי מפורשת - כלומר, אין "ירושה" אוטומטית של תחום ההגדרה. הפונקציה מוגדרת כאשר $f(x) \neq 0$ וכאשר $x \ln(x) \neq 0$

$$x > 0, x \neq 1$$

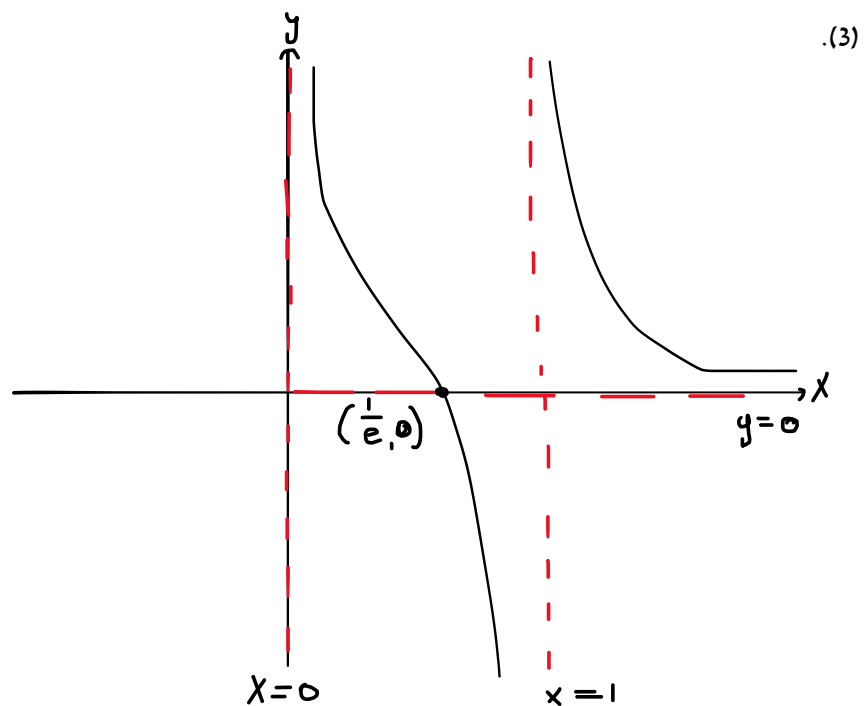
כלומר,

$$0 < x < 1 \text{ או } x > 1$$

(2). נקודות האפס (כולל "חור") של $f(x)$ הן האסימפטוטות האנכיות של $g(x)$. לכן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$ תהיינה $x = 0, x = 1$.

מכיוון ש- $x > 0$, נבדוק רק מה קורה באינסוף. נשים לב שהביטוי במכנה הוא מכפלה בין פונקציה פולינומית ממעלה 1 לבין פונקציה לוגריתמית, בעוד המונה הוא רק פונקציה לוגריתמית (עם הזהה ב-1). מכאן כי המכנה "חזק יותר" בסדרי גודל, ומושך יותר מטה בסביבת האינסוף ל- $y = 0$. מכאן כי האסימפטוטה האופקית באינסוף היא $y_\infty = 0$.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות



סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

חשבון אינטגרלי של פונקציות אינטגרליות:

נתחיל בתובנה החשובה שלנו ממקודם:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

אם נזכור שאינטגרציה היא פעולה הפוכה לגזירה, נקבל אינטגרל חשוב מאוד שהיה חסר לנו בשנה שעברה:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

שימו לב! מכיוון שה- $\ln(x)$ יודע לקבל רק ערכים חיוביים, אנחנו שמים ערך מוחלט.

אם נכליל על פי הנגזרת:

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

נקבל:

$$\int \frac{1}{x \ln(a)} dx = \log_a(|x|) + C$$

אלו הנוסחאות המספיקות לנו, בנוסף לנוסחאות הכלליות משנה שעברה, לכל החשבון האינטגרלי בפונקציות לוגריתמיות.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

שאלת בגרות מלאה:

המשך לשאלה הקודמת:

$$\text{נתונה הפונקצייה } f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x

של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$

עם ציר ה- x .

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$$\text{נתונה הפונקצייה } g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$$

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים

של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

$$\text{נתון הביטוי } \int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx, \text{ הוא פרמטר גדול מ-1. } k$$

ה. (1) קבעו איזה מן הביטויים $I - II$ שווה לערך של הביטוי הנתון.

נמקו את קביעתכם.

$$\text{I. } k + \ln(k) \quad \text{II. } k + \ln 2$$

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^3$ ו- $x = e^6$.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

ה(1).

$$\begin{aligned} \int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx &= \int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x \ln(x)} dx + \int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x \ln(x)} dx + \ln|e^{2k}| - \ln|e^k| = \int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x \ln(x)} dx + k \end{aligned}$$

את האינטגרל שנותר אפשר לפתור בשתי שיטות:

1. נשים לב שמדובר בביטוי שמכיל פונקציה וגזרתה: $\frac{1}{x} \ln(x)$. נציג את הביטוי כמכפלה ביניהם:

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x} \cdot \ln(x)^{-1} dx$$

נוסחה מדף הנוסחאות:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

במקרה שלנו, $u(x) = \ln(x)$ ו- $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x} \cdot \ln(x)^{-1} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_{e^k}^{e^{2k}} = \ln|2k| - \ln|k| = \ln(2)$$

2. נציב משתנה חדש $t = \ln(x)$. אם נגזור את שני האגפים נקבל $dt = \frac{1}{x} dx$ שזה ביטוי שקיים באינטגרל. כלומר:

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \frac{1}{x} \cdot \ln(x)^{-1} dx = \int_k^{2k} \frac{1}{t} dt = \ln|2k| - \ln|k| = \ln(2)$$

נחזיר חזרה לביטוי הכולל:

$$\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln(2) + k$$

ולכן הביטוי המתאים הוא ביטוי II.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

ה(2). הפונקציה $g(x)$ (ראו סקיצה בעמוד 16) כולאת שטח חיובי עם ציר ה- x בתחום $e^3 < x < e^6$. לכן אותו שטח כלוא שקול לביטוי:

$$\int_{e^3}^{e^6} g(x) dx = \int_{e^3}^{e^6} \frac{\ln(x) + 1}{x \cdot \ln(x)} dx = \int_{e^3}^{e^6} \left(\frac{\ln(x)}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \right) dx = \int_{e^3}^{e^6} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \right) dx$$

נשים לב שהאינטגרנד , הפונקציה שהתקבלה בתוך האינטגרל, שקולה לאחת מסעיף ה(1), עבור $k = 3$.
לכן נוכל להציב בביטוי II:

$$\int_{e^3}^{e^6} g(x) dx = 3 + \ln(2)$$

והשטח הכלוא הוא $3 + \ln(2)$ יח"ר.