

חקירת פונקציית מנה משולבת שורש

פונקציית מנה משולבת שורש היא פונקציה בעלת מכנה תלוי x , בה או במונה או במכנה קיים ביטוי תלוי x המצוי תחת שורש.

לדוגמה:

הפונקציה $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ היא פונקציית מנה משולבת שורש.

נדגים את החקירה של פונקציה מסוג זה על פי הנלמד בפרקים 'חקירת פונקציית מנה' ו-'חקירת פונקציית שורש':

- תחום הגדרה: על המכנה להיות שונה מאפס, ועל כל ביטויי השורש להיות אי שליליים:

$$\sqrt{x} + 1 \neq 0 \text{ וגם } x \geq 0$$

$$\sqrt{x} \neq -1 \text{ וגם } x \geq 0$$

מכיוון ששורש הוא תמיד אי שלילי, תחום ההגדרה הוא $x \geq 0$.

- נקודות חיתוך עם הצירים: בדיוק כמו חקירה רגילה. חיתוך עם ציר x = השוואת הפונקציה לאפס, וחיתוך עם ציר y = הצבת אפס בפונקציה:

חיתוך עם ציר x :

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0$$

$$2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0$$

לפיכך הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(0,0)$.

חיתוך עם ציר y :

$$f(0) = \frac{2\sqrt{0}}{\sqrt{0}+1} = \frac{0}{1} = 0$$

לפיכך הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0,0)$.

- נקודות קיצון: עלינו לשלב פה את נוסחת גזירת פונקציית המנה ונוסחת גזירת פונקציית השורש.

נזכור שאפשר לפצל את פונקציית המנה לשתי פונקציות: פונקציית מונה ופונקציית מכנה.

במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}g(x) &= 2\sqrt{x} \\h(x) &= \sqrt{x} + 1\end{aligned}$$

נוסחת מנה:

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

כאשר נחשב את $g'(x)$ ניעזר בנוסחת נגזרת השורש:

$$\begin{aligned}g(x) &= 2\sqrt{x} = \sqrt{4x} \\g'(x) &= \frac{4}{2\sqrt{4x}} = \frac{4}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

כאשר נחשב את $h'(x)$ ניעזר בנוסחת נגזרת השורש:

$$\begin{aligned}h(x) &= \sqrt{x} + 1 \\h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

כאשר נחשב את $f'(x)$ ניעזר בנוסחת נגזרת המנה:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

נשים לב שהמונה לעולם לא מתאפס, ולכן לנגזרת אין נקודת קיצון ייחודית, אלא קיצון קצה על פי תחום ההגדרה בנקודה $(0,0)$.

נשים לב שהמכנה והמונה הם ביטויים חיוביים בהכרח, ולכן אחרי $x = 0$ הפונקציה f עולה. מכאן כי הנקודה $(0,0)$ היא קיצון קצה מסוג מינימום.

- תחומי עליה וירידה:

על פי עבודתנו למציאת הקיצון, תחום העלייה הוא $x > 0$.

- אסימפטוטות מאונכות לצירים:

אסימפטוטות אנכיות – נשווה את המכנה לאפס. אם יש פתרון, $x = a$, נבדוק האם הוא מאפס את המונה. אם המונה לא מתאפס בנקודה $x = a$, אזי הישר $x = a$ אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

אם המונה מתאפס בנקודה $x = a$ נמשיך לפשט את הפונקציה. אם לאחר פישוט הפונקציה, המכנה ממשיך להתאפס בנקודה $x = a$, אך המונה לא מתאפס, אזי הישר $x = a$ אסימפטוטה אנכית. אם המכנה כבר לא מתאפס אזי הנקודה $(a, f(a))$ חור.

נסתכל על הדוגמה שלנו:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$$

נשווה את המכנה לאפס:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + 1 &= 0 \\ \sqrt{x} &= -1\end{aligned}$$

ולמשוואה אין פתרון ממשי. לפיכך – אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטות אופקיות – נבדוק איזה ערך מקבלת הפונקציה כשהיא מתקרבת לאינסוף החיובי והשלילי. נזכור את תחום ההגדרה במהלך העבודה שלנו.

נסתכל על הדוגמה שלנו:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$$

תחום ההגדרה הוא $x \geq 0$. לפיכך הפונקציה לא מגיעה לעולם לאינסוף השלילי, ועלינו לבדוק רק את האינסוף החיובי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

ולכן לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y = 2$.

- שרטוט סקיצת גרף הפונקציה:

נסכם את כל המידע שלנו על התנהלות הפונקציה: תחום הגדרתה, חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, אסימפטוטות אנכיות ואסימפטוטות אופקיות:

