

זהויות טריגונומטריות מתקדמות

בסיכום זה נסקור את קבוצות הזהויות המתקדמות שנותרו בפרק הטריגונומטרי. לאחר מכן, נציג דוגמאות לשימוש בזהויות אלו באמצעות תרגיל הוכחת זהות, ומשוואה טריגונומטרית.

זהויות זווית כפולה:

תהי α זווית ממשית כלשהי. אזי:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

! הערות:

- הזהויות נכונות **לכל** α . לא דווקא לזווית שמהווה כפולה של 2. לדוגמה:
 $\sin(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. נבחר בזווית שמהווה 'זווית כפולה' בהתאם ליתר הזוויות בתרגיל.

- הזהות של $\cos(2\alpha)$ מעניקה לנו כמה אפשרויות שקולות. אנחנו נבחר את המעבר שלנו בהתאם ליתר הפונקציות הטריגונומטריות בתרגיל. לדוגמה:
בהינתן הביטוי $\cos(2\alpha) = \sin(\alpha) + 2$ נעדיף לפשט את ה- $\cos$ -ל- $1 - 2 \sin^2 \alpha$ על מנת לקבל משוואה שכל הפונקציות הפועלות בה הן מאותו הסוג.

זהויות סכום והפרש זוויות:

תהיינה α, β זוויות ממשיות כלשהן. אזי:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

! הערות:

- במבחנים, מתכונות ובגרורות אל תצפו לראות בבהירות את הסכום. לא "יאכילו אתכם" בכפית בביטוי כגון $\cos(50^\circ + 20^\circ)$, אלא בביטוי כגון $\cos(70^\circ)$. **תפקידנו הוא לבחור לפשט (או לסבך) בהתאם ליתר התרגיל על מנת לקבל צמצום של כמה שיותר משתתפים.**

זהויות סכום והפרש פונקציות:

תהינה α, β זוויות ממשיות כלשהן. אז:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

! הערות:

- לפעמים נדרש מאיתנו להפוך את הפונקציות בביטוי מסויים על מנת לקבל סכום/הפרש של אותן הפונקציות. לדוגמה:
 $\sin \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin(90^\circ - \beta) = 2 \sin \left(\frac{\alpha + 90^\circ - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - 90^\circ + \beta}{2} \right)$

תרגול לדוגמה: הוכיחו את הזהות הבאה:

$$\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 2 \cos 6\alpha \cos 2\alpha$$

ננסה לפשט באמצעות זהויות את האגף השמאלי באמצעות סכום פונקציות:

$$\cos(4\alpha) + \cos(8\alpha) = 2 \cos \left(\frac{4\alpha + 8\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{4\alpha - 8\alpha}{2} \right) = 2 \cos(6\alpha) \cos(-2\alpha)$$

על פי זהות, $\cos$ פונ' זוגית ולכן:

$$2 \cos(6\alpha) \cos(-2\alpha) = 2 \cos(6\alpha) \cos(2\alpha)$$

קיבלנו שהאגף הימני שקול לשמאלי, ובכך הוכחנו שהזהות מתקיימת לכל α .

תרגול לדוגמה: פתרו את המשוואה הבאה:

$$3 = 5 \sin(x + 20^\circ) + \cos(2x + 40^\circ)$$

נשים לב שהזווית בתוך ה- $\cos$ היא כפולה לזווית בתוך ה- $\sin$. כך אנו מקבלים מוטיבציה לזווית כפולה!

$$5 \sin(x + 20^\circ) + \cos(2x + 40^\circ) = 5 \sin(x + 20^\circ) + 1 - 2 \sin^2(x + 20^\circ)$$

כעת קיבלנו את המשוואה הריבועית:

$$3 = 5 \sin(x + 20^\circ) + 1 - 2 \sin^2(x + 20^\circ)$$

נציב $t = \sin(x + 20^\circ)$:

$$\begin{aligned}2 &= 5t - 2t^2 \\ 2t^2 - 5t + 2 &= 0\end{aligned}$$

וקיבלנו משוואה קלה לפתרון...