

משוואות טריגונומטריות יסודיות:

משוואה טריגונומטרית היא משוואה שבה x הוא קבוצת זוויות מסוימות שמקיימות את המשוואה. על מנת לפתור משוואות טריגונומטריות, ניעזר בכלים שלמדנו: הזהויות הטריגונומטריות.

תזכורת: בהינתן מספר c אם נרצה לבדוק בהינתן איזו זווית נקבל את המספר c מפונקציית $\sin, \cos, \tan$ – נלחץ במחשבון shift, שם הפונקציה שלנו, ונכניס את c . לבסוף נבצע חישוב והתוצאה תהיה הזווית הראשונה המקיימת את הנדרש.

משוואות מהצורה $\sin(x) = a$:

על מנת לפתור משוואה זו, נחלק את המשוואה כך שבאגף אחד יהיה פונקציית ה- $\sin$, ובאגף השני הביטוי המספרי שאינו תלוי באף גורם טריגונומטרי.

לבסוף, נלחץ במחשבון $\sin + \text{shift}$, נזין את הערך המספרי שבודדנו, ונקבל זווית α .

פתרונות המשוואה יהיו:

$$x_1 = \alpha + 360^\circ k, x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$$

כאשר $360^\circ k$ מסמנים כמות מעגלים שבוצעו – שכן אם נבצע סיבוב שלם – נגיע לאותה הנקודה על גרף הפונקציה $\sin$ בסופו של דבר. k הוא מספר הסיבובים שבוצעו, והוא מספר שלם.

הסיבה שלמשוואה יש שתי קבוצות פתרון נובעת מן הזהות $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$.

! למשוואה $\sin(x) = c$ כאשר $c > 1$ או $c < -1$, אין שום פתרון.

דוגמאות:

- $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_{1,2} = 60^\circ + 360^\circ k, 120^\circ + 360^\circ k$
- $4 \sin(2x + 20^\circ) - 3 = 0 \rightarrow$
 $4 \sin(2x + 20^\circ) = 3 \rightarrow$
 $\sin(2x + 20^\circ) = \frac{3}{4} \rightarrow$
 $2x + 20^\circ = 48.6^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 14.3^\circ + 180^\circ k$
 $2x + 20^\circ = 131.4^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_2 = 55.7^\circ + 180^\circ k$

משוואות ייחודיות של $\sin$:

ישנם משוואות ספציפיות של $\sin$ בעלות חוקיות ייחודית:

$$\sin(x) = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$\sin(x) = 0 \rightarrow x = 180^\circ k$$

$$\sin(x) = -1 \rightarrow x = -90^\circ + 360^\circ k$$

משוואות מהצורה $\cos(x) = a$:

על מנת לפתור משוואה זו, נחלק את המשוואה כך שבאגף אחד יהיה פונקציית ה-cos, ובאגף השני הביטוי המספרי שאינו תלוי באף גורם טריגונומטרי.

לבסוף, נלחץ במחשבון $\cos$ + shift, נזין את הערך המספרי שבודדנו, ונקבל זווית α .

פתרונות המשוואה יהיו:

$$x_1 = \alpha + 360^\circ k, x_2 = -\alpha + 360^\circ k$$

כאשר $360^\circ k$ מסמנים כמות מעגלים שבוצעו – שכן אם נבצע סיבוב שלם – נגיע לאותה הנקודה על גרף הפונקציה $\cos$ בסופו של דבר. k הוא מספר הסיבובים שבוצעו, והוא מספר שלם.

הסיבה שלמשוואה יש שתי קבוצות פתרון נובעת מן הזהות $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.

! למשוואה $\cos(x) = c$ כאשר $c > 1$ או $c < -1$, אין שום פתרון.

דוגמאות:

- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_{1,2} = 30^\circ + 360^\circ k, -30^\circ + 360^\circ k$
- $4 \cos(2x + 20^\circ) - 3 = 0 \rightarrow$
 $4 \cos(2x + 20^\circ) = 3 \rightarrow$
 $\cos(2x + 20^\circ) = \frac{3}{4} \rightarrow$
 $2x + 20^\circ = 41.4^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 10.7^\circ + 180^\circ k$
 $2x + 20^\circ = -41.4^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_2 = -30.7^\circ + 180^\circ k$

משוואות ייחודיות של $\cos$:

ישנם משוואות ספציפיות של $\cos$ בעלות חוקיות ייחודית:

$$\cos(x) = 1 \rightarrow x = 360^\circ k$$

$$\cos(x) = 0 \rightarrow x = 90 + 180^\circ k$$

$$\cos(x) = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k$$

משוואות מהצורה $\tan(x) = a$:

על מנת לפתור משוואה זו, נחלק את המשוואה כך שבאגף אחד יהיה פונקציית ה-tan, ובאגף השני הביטוי המספרי שאינו תלוי באף גורם טריגונומטרי.

לבסוף, נלחץ במחשבון shift + tan, נזין את הערך המספרי שבודדנו, ונקבל זווית α .

פתרון המשוואה יהיה:

$$x_1 = \alpha + 180^\circ k$$

כאשר $180^\circ k$ מסמנים כמות חצאי מעגלים שבוצעו – שכן אם נבצע חצי סיבוב – נגיע לאותה הנקודה על גרף הפונקציה tan בסופו של דבר. k הוא מספר חצאי הסיבובים שבוצעו, והוא מספר שלם.

נשים לב שבמשוואה מסוג זה אנו מקבלים קבוצת פתרונות אחת.

דוגמאות:

- $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 40.9^\circ + 180^\circ k$
- $4 \tan(2x + 20^\circ) - 3 = 0 \rightarrow$
 $4 \tan(2x + 20^\circ) = 3 \rightarrow$
 $\tan(2x + 20^\circ) = \frac{3}{4} \rightarrow$
 $2x + 20^\circ = 36.87^\circ + 180^\circ k \rightarrow x = 8.435^\circ + 90^\circ k$

משוואות מהצורה $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$:

אם נתרגם את תצורת המשוואה, הכוונה היא למשוואה המכילה שתי פונקציות $\sin$ שונות, כאשר בכל אחת ישנו ביטוי תלוי x .

במשוואות אלו נרצה לבודד את פונקציות ה- $\sin$ - כל אחת לאגף נפרד.

כאשר ניתקל בביטוי כגון $-\sin(f(x))$ ניעזר בזהות $-\sin(x) = \sin(-x)$ על מנת לבודד את הפונקציה.

בהינתן המשוואה $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$, יתקבלו המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned}f(x_1) &= g(x_1) + 360^\circ k \\f(x_2) &= 180^\circ - g(x_2) + 360^\circ k\end{aligned}$$

ופתרון משוואות אלו יהווה את פתרון המשוואה הראשית.

כאשר $360^\circ k$ מסמנים כמות מעגלים שבוצעו - שכן אם נבצע סיבוב שלם - נגיע לאותה הנקודה על גרף הפונקציה $\sin$ בסופו של דבר. k הוא מספר הסיבובים שבוצעו, והוא מספר שלם.

הסיבה שלמשוואה יש שתי קבוצות פתרון נובעת מן הזהות $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$.

לדוגמה:

$$\begin{aligned}\sin(2x - 20^\circ) &= -\sin(x - 10^\circ) \rightarrow \\ \sin(2x - 20^\circ) &= \sin(-x + 10^\circ) \rightarrow \\ 2x - 20^\circ &= -x + 10^\circ + 360^\circ k \rightarrow 3x = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 10^\circ + 120^\circ k \\ 2x - 20^\circ &= 170^\circ + x + 360^\circ k \rightarrow x_2 = 190^\circ + 360^\circ k\end{aligned}$$

משוואות מהצורה $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$:

אם נתרגם את תצורת המשוואה, הכוונה היא למשוואה המכילה שתי פונקציות $\cos$ שונות, כאשר בכל אחת ישנו ביטוי תלוי x .

במשוואות אלו נרצה לבודד את פונקציות ה- $\cos$ - כל אחת לאגף נפרד.

כאשר ניתקל בביטוי כגון $-\cos(f(x))$ ניעזר בזהות $-\cos(x) = \cos(180^\circ - x)$ על מנת לבודד את הפונקציה.

בהינתן המשוואה $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$, יתקבלו המשוואות הבאות:

$$f(x_1) = g(x_1) + 360^\circ k$$

$$f(x_2) = -g(x_2) + 360^\circ k$$

ופתרון משוואות אלו יהווה את פתרון המשוואה הראשית.

כאשר $360^\circ k$ מסמנים כמות מעגלים שבוצעו - שכן אם נבצע סיבוב שלם - נגיע לאותה הנקודה על גרף הפונקציה $\cos$ בסופו של דבר. k הוא מספר הסיבובים שבוצעו, והוא מספר שלם.

הסיבה שלמשוואה יש שתי קבוצות פתרון נובעת מן הזהות $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.

לדוגמה:

$$\cos(2x - 20^\circ) = -\cos(x - 10^\circ) \rightarrow$$

$$\cos(2x - 20^\circ) = \cos(190^\circ - x) \rightarrow$$

$$2x - 20^\circ = 190^\circ - x + 360^\circ k \rightarrow 3x = 210^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 70^\circ + 120^\circ k$$

$$2x - 20^\circ = -190^\circ + x + 360^\circ k \rightarrow x_2 = -170^\circ + 360^\circ k$$

משוואות מהצורה $\tan(f(x)) = \tan(g(x))$:

אם נתרגם את תצורת המשוואה, הכוונה היא למשוואה המכילה שתי פונקציות $\tan$ שונות, כאשר בכל אחת ישנו ביטוי תלוי x .

במשוואות אלו נרצה לבודד את פונקציות ה- $\tan$ - כל אחת לאגף נפרד.

כאשר ניתקל בביטוי כגון $-\tan(f(x))$ ניעזר בזהויות $-\tan(f(x)) = \tan(180^\circ - f(x)) = \tan(-f(x))$ על מנת לבודד את הפונקציה.

בהינתן המשוואה $\tan(f(x)) = \tan(g(x))$, תתקבל המשוואה הבאה:

$$f(x_1) = g(x_1) + 180^\circ k$$

ופתרון משוואות זו יהווה את פתרון המשוואה הראשית.

כאשר $180^\circ k$ מסמנים כמות חצאי מעגלים שבוצעו - שכן אם נבצע חצי סיבוב - נגיע לאותה הנקודה על גרף הפונקציה $\tan$ בסופו של דבר. k הוא מספר חצאי הסיבובים שבוצעו, והוא מספר שלם.

לדוגמה:

$$\tan(2x - 20^\circ) = -\tan(x - 10^\circ) \rightarrow$$

$$\tan(2x - 20^\circ) = \tan(10^\circ - x) \rightarrow$$

$$2x - 20^\circ = 10^\circ - x + 180^\circ k \rightarrow 3x = 30^\circ + 180^\circ k \rightarrow x = 10^\circ + 60^\circ k$$

משוואות מעורבות:

משוואות מעורבות הן משוואות בהן יש יותר מסוג אחד של פונקציה טריגונומטרית.

$$\text{לדוגמה: } \sin(2x) = \cos(3x - 10^\circ)$$

משוואות אלו אנו פותרים בעזרת הזהויות הבאות:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - (-\alpha)) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

נפתור את המשוואה שהצגנו כדוגמה:

$$\sin(2x) = \cos(3x - 10^\circ) \rightarrow$$

$$\sin(2x) = \sin(90^\circ - 3x + 10^\circ) \rightarrow$$

$$\sin(2x) = \sin(100^\circ - 3x) \quad 2x = 100^\circ - 3x + 360^\circ k \rightarrow 5x = 100^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 20^\circ + 72^\circ k$$

$$2x = 80^\circ + 3x + 360^\circ k \rightarrow -x = 80^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = -80^\circ - 360^\circ k \rightarrow x_2 = -80^\circ + 360^\circ k$$

משוואות טריגונומטריות ריבועיות ומשוואות הנפתרות בשיטת ההצבה:

ישנן משוואות טריגונומטריות שהפורמט שלהן מזכיר מאוד משוואות רגילות מחזקה מסוימת, שלמדנו לפתור בחטיבה ובכיתה י'.

$$\text{לדוגמה: } \sin^2(2x) - \sin(2x) - 2 = 0$$

משוואה זו נפתור באמצעות הצבה. נלך לפי הדוגמה שלנו:

$$t = \sin(2x)$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t = 2, -1$$

$$\sin(2x) = 2 \rightarrow \emptyset$$

$$\sin(2x) = -1 \rightarrow$$

$$2x = -90^\circ + 360^\circ k \rightarrow$$

$$x = -45^\circ + 180^\circ k$$

! כל הזהויות המעורבות רלוונטיות גם לסוג משוואות זה.

פתרון משוואות בתחום

סוג נוסף של משוואות הוא משוואות להן נוספת הגבלה על הפתרונות. לדוגמה: $0 \leq x \leq 180^\circ$

במקרה זה, עלינו לספק פתרונות מדויקים עבור x במקום לספק פתרון כללי תלוי k .

על מנת לבצע זאת, נפתור כרגיל את המשוואה, נמצא את הפתרונות הכלליים, ונציב כל פעם ערכי k שונים.

אם הזווית שנוצרת לאחר ההצבה נמצאת בתחום המבוקש – היא תיכנס לרשימת הפתרונות.

במידה והזווית חורגת מהתחום כי עוברת אותו, כלומר על פי הדוגמה שלנו: $x > 180^\circ$, הפתרון הזה, וכל יתר הפתרונות בהן k גדול מההצבה שביצענו – אינם חלק מרשימת הפתרונות.

במידה והזווית חורגת מהתחום כי לא מגיעה אליו, כלומר על פי הדוגמה שלנו: $x < 0$, הפתרון הזה, וכל יתר הפתרונות בהן k קטן מההצבה שביצענו – אינם חלק מרשימת הפתרונות.

לדוגמה, נפתור את המשוואה $\sin(2x + 30^\circ) = -\cos(5x)$ בתחום $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$:

$$\sin(2x + 30^\circ) = \cos(180 - 5x)$$

$$\sin(2x + 30^\circ) = \sin(-90^\circ + 5x)$$

$$2x + 30^\circ = -90^\circ + 5x + 360^\circ k \rightarrow -3x = -120^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 40^\circ + 120^\circ k$$

$$2x + 30^\circ = 270^\circ - 5x + 360^\circ k \rightarrow 7x = 240^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_2 = 34.286^\circ + 51.43^\circ k$$

כעת ננהל טבלה:

x_2	x_1	k
-222.864	-560	-5
-171.434	-440	-4
-120.004	-320	-3
-68.574	-200	-2
-17.144	-80	-1
34.286	40	0
85.716	160	1
137.146	280	2
188.576	400	3

ולפיכך פתרונות המשוואה בתחום הנתון הם:

$$x = -171^\circ, -120^\circ, -80^\circ, -68.574^\circ, -17.144^\circ, 34.28^\circ, 40^\circ, 85.716^\circ, 137.146^\circ, 160^\circ$$