

משוואות אי רציונליות

משוואות אי רציונליות כוללות ביטויים אלגבריים המצויים בתוך שורש.

דרך העבודה כוללת בידוד (במידת האפשר) של הביטוי עם השורש באגף אחד, ויתר הביטויים באגף השני.

לא פעם, נצטרך לעשות שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר. זאת, כחלק משיטת העבודה שבה נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה.

לעיתים, אף נצטרך לבצע פעמיים העלאה בריבוע של אגפי המשוואה.

חוק מהותי בפתרון משוואות אי-רציונליות הוא לקיים בדיקה של התוצאות שקיבלנו, ע"י **הצבת** במשוואה המקורית, כך ש:

- אם בהצבה מתקבל פסוק אמת - אזי הפתרון נכון.

- אם בהצבה מתקבל פסוק שקר - אזי הפתרון נפסל.

חובה לקיים בדיקה גם אם הגדרנו תחום הגדרה, והפתרונות לכאורה מתאימים.

לדוגמה:

$$\sqrt{2x+1} + 3 = 0$$

נבודד את הביטוי שבשורש:

$$\sqrt{2x+1} = -3$$

נעלה את שני אגפי המשוואה בריבוע:

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (-3)^2$$

נזכור שחזקה פעולה הפוכה לשורש:

$$2x + 1 = 9$$

ונפתור כרגיל:

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

נבדוק את הפתרון בעזרת הצבה:

$$\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 0$$

קיבלנו פסוק שקר, ולכן למשוואה **אין פתרון**.

נראה דוגמה נוספת:

$$x + 3 = 4\sqrt{x}$$

נשים לב שהביטוי תלוי השורש אומנם בעל מקדם, אך נזכור את חוק החזקה: $(p \cdot q)^2 = p^2 q^2$ ונעלה את המשוואה בריבוע:

$$(x + 3)^2 = (4\sqrt{x})^2$$
$$(x + 3)^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{x})^2$$

$$(x + 3)^2 = 16x$$

נפעיל נוסחת כפל מקוצר: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$x^2 + 6x + 9 = 16x$$

נפתור כרגיל:

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x - 9)(x - 1) = 0$$
$$x = 9 \text{ או } x = 1$$

נבדוק את הפתרונות שלנו בעזרת הצבה:

$$9 + 3 = 4\sqrt{9} \text{ האם:}$$

$$9 + 3 = 12$$

$$4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

קיבלנו פסוק אמת $12 = 12$ ולכן $x = 9$ אכן פתרון למשוואה.

$$1 + 3 = 4\sqrt{1} \text{ האם:}$$

$$1 + 3 = 4$$

$$4\sqrt{1} = 4$$

קיבלנו פסוק אמת $4 = 4$ ולכן $x = 1$ גם הוא פתרון למשוואה.

נסכם ונאמר כי $x = 1, 9$.

נפתור תרגיל נוסף:

$$x + 3\sqrt{1 - 4x} = 9$$

נבודד את הביטוי עם השורש:

$$3\sqrt{1 - 4x} = 9 - x$$

נעלה את המשוואה כולה בריבוע באמצעות חוקי חזקות ונוסחאות הכפל המקוצר:

$$(3\sqrt{1-4x})^2 = (9-x)^2$$

$$9(1-4x) = 81 - 18x + x^2$$

נפתור כרגיל:

$$9 - 36x = 81 - 18x + x^2$$

$$x^2 + 18x + 72 = 0$$

$$(x+6)(x+12) = 0$$

$$x = -6, -12$$

נבדוק את הפתרונות שלנו:

$$-6 + 3\sqrt{1-4 \cdot (-6)} = 9$$

$$-6 + 3\sqrt{1+24} = -6 + 3\sqrt{25} = -6 + 3 \cdot 5 = -6 + 15 = 9$$

קיבלנו פסוק אמת $9 = 9$ ולכן הפתרון $x = -6$ מתאים.

$$-12 + 3\sqrt{1-4 \cdot (-12)} = 9$$

$$-12 + 3\sqrt{1+48} = 9$$

$$-12 + 3\sqrt{1+48} = -12 + 3\sqrt{49} = -12 + 3 \cdot 7 = -12 + 21 = 9$$

קיבלנו פסוק אמת $9 = 9$ ולכן הפתרון $x = -12$ מתאים.

נכיר סוג פתרון נוסף:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3$$

נבודד את אחד מן השורשים. נבחר בשורש "המורכב יותר".

$$\sqrt{x+3} = 3 - \sqrt{x}$$

נעלה את המשוואה בריבוע:

$$(\sqrt{x+3})^2 = (3 - \sqrt{x})^2$$

ניעזר בחוקי הכפל המקוצר:

$$x + 3 = 9 - 6\sqrt{x} + x$$

כעת נבודד את הביטוי היחיד עם השורש:

$$6\sqrt{x} = 6$$

נחלק ב-6:

$$\sqrt{x} = 1$$

נעלה בריבוע:

$$x = 1$$

נציב את הפתרון ונבדוק:

$$\sqrt{1} + \sqrt{1+3} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$$

וקיבלנו פסוק אמת $3 = 3$, ולכן הפתרון נכון.

בעמוד הבא נציג פתרון משוואה אי רציונלית שכל הביטויים בה תחת שורש.

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+1} = \sqrt{5-x}$$

נעלה בריבוע את המשוואה:

$$(\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{5-x})^2$$

ניעזר בכפל מקוצר:

$$(\sqrt{2x+8})^2 - 2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+1} + (\sqrt{x+1})^2 = 5-x$$

נפשט:

$$2x+8 - 2\sqrt{(2x+8)(x+1)} + x+1 = 5-x$$

$$3x+9 - 2\sqrt{(2x+8)(x+1)} = 5-x$$

$$4x+4 = 2\sqrt{(2x+8)(x+1)}$$

נחלק ב-2:

$$2x+2 = \sqrt{(2x+8)(x+1)}$$

נעלה בריבוע ונפתור את התרגיל:

$$(2x+2)^2 = (\sqrt{(2x+8)(x+1)})^2$$

$$4x^2 + 8x + 4 = (2x+8)(x+1)$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 2x^2 + 10x + 8$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

נבדוק את הפתרונות שלנו:

$$\sqrt{2 \cdot 2 + 8} - \sqrt{2 + 1} = \sqrt{5 - 2}$$

$$\sqrt{4 + 8} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

קיבלנו פסוק אמת $\sqrt{3} = \sqrt{3}$ ולכן הפתרון מתאים.

$$\sqrt{2 \cdot (-1) + 8} - \sqrt{-1 + 1} = \sqrt{5 + 1}$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{0} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

קיבלנו פסוק אמת $\sqrt{6} = \sqrt{6}$ ולכן גם פתרון זה מתאים.