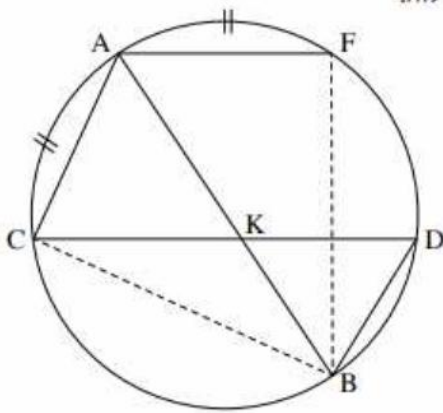


קובץ מאגר שאלות הכנה לבחינה 2 במתמטיקה מחצית א'

גיאומטריה אוקלידית:

טיפים לפתרון שאלות גיאומטריות – הסעיפים הגיאומטריים הראשונים עוסקים בדרך כלל במשחק זוויות. לדוגמה, סכום זוויות במשולש, זוויות היקפיות/מרכזיות במעגל, זוויות בין ישרים מקבילים, וכו'. רוב הסעיפים הבאים יעסקו במערכות יחסים בין משולשים דומים שהוכחנו או נצטרך להוכיח. חשבו איך להתאים את הדרך לפתרון ולא את הפתרון לדרך. ייחסו חשיבות לסוג וסדר הקודקודים בטענות שעליכם להוכיח.



1. AB הוא קוטר במעגל. CD ו- AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.

AB ו- CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור).

א. (1) הוכח כי $\angle FAB = \angle CAB$.

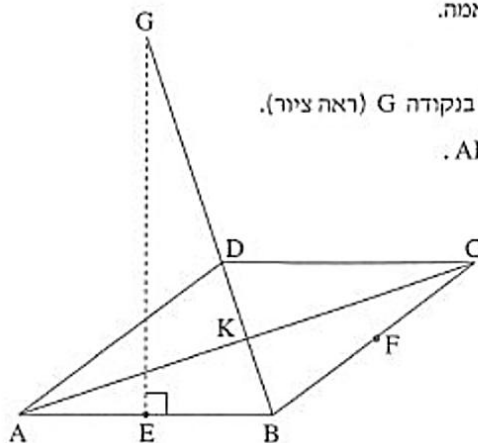
(2) הוכח כי $BK = BD$.

ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

(1) הוכח כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.



2. ABCD הוא מעוין. E ו- F הן אמצעי הצלעות AB ו- BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל- AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

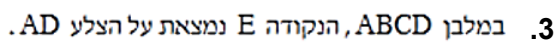
ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC, ו- BFG דומים זה לזה.

נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,

וב- r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ וכי $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.



המרחב EABF הוא בר חסימה במעגל.

נתון: $DE = EA$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב-S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S.

7. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

DE = a : ממס

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a .

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a .

4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).

מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו- N ,

והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.

מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.

מִן הַנִּקּוּדָה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו- B.

ישראלים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים

בנקודות C ו- D, כמתואר בסרטוט.

נ. הוכח כי $AB \perp MN$.

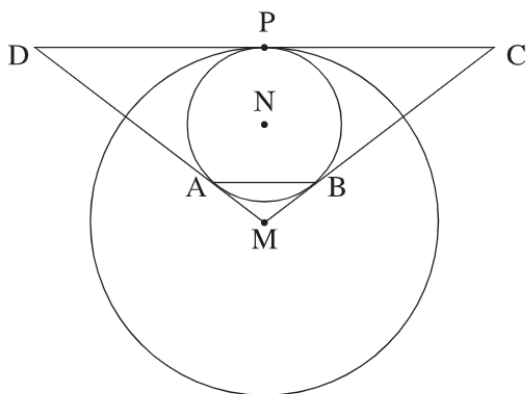
ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

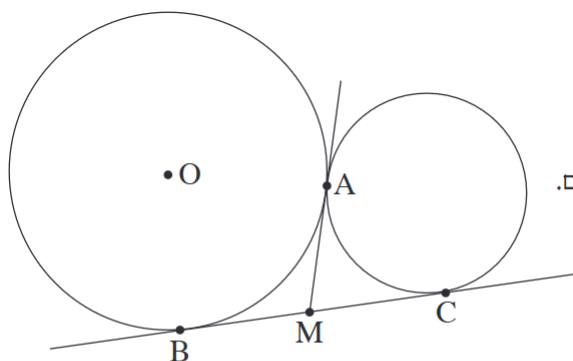
ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$

7. (1) מצא את R_1 ואת R_2 .

(2) מצא את DC.





5. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).

הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.

מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.

B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.

שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

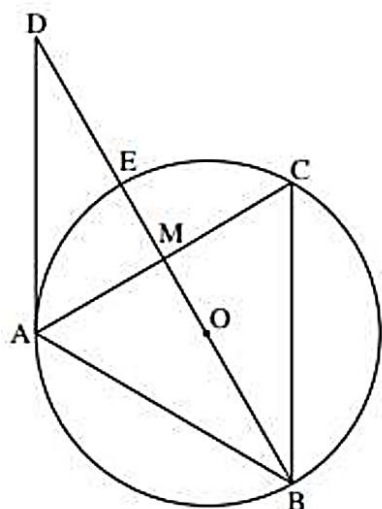
א. הוכח כי הזווית $\angle BAC$ ישרה.

ב. הוכח כי $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$

נתון: $AB = 8$, $AC = 6$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשב את יחס השטחים $\frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle AMC}}$.



6. הישר AD משיק למעגל בנקודה A.

הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O.

וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E.

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש- $BC \parallel AD$.

הישרים BD ו-AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).

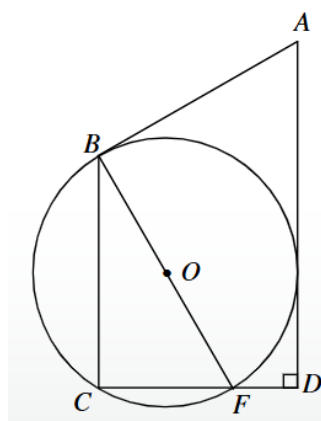
א. הוכח: $AB = AC$.

נתון: AE חוצה את הזווית MAD.

ב. הוכח: $BM \perp AC$.

ג. הוכח כי אורך הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.

ד. הוכח כי ABCD הוא מעוין.



7. המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל. מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל — האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.

נתון: $AD \perp CD$.

א. הוכח: $\angle BFC = \angle BAD$.

נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש-FK חוצה את $\angle BFC$.

ב. הוכח: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

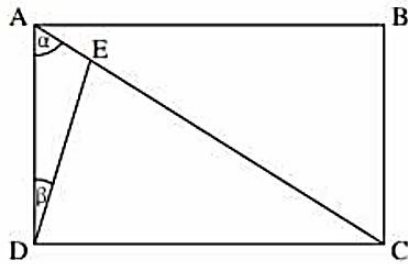
ד. הסבר מדוע שטח $\triangle BFK$ גדול משטח $\triangle KFC$.

גיאומטריה אוקלידית – תשובות:

1. א(1) – הוכחה. א(2) – הוכחה. ב – הוכחה. ג – הוכחה. ד – הוכחה.
2. א – הוכחה. ב – הוכחה. ג(1) – הוכחה. ג(2) – הוכחה.
3. א – הוכחה. ב – $\frac{1}{2}$. ג – $S_{\Delta DFC} = 2S$, $S_{\Delta BFC} = 4S$. ד – $\sqrt{1.5}$. ה(1) – $\sqrt{6}a$. ה(2) – $\sqrt{3}a$.
4. א – הוכחה. ב – הוכחה. ג – הוכחה. ד(1) – $R_1 = 14, R_2 = 6$. ד(2) – $DC = 12\sqrt{7}$.
5. א – הוכחה. ב – הוכחה. ג – $\frac{20}{3}$. ד – $\frac{25}{18}$.
6. א – הוכחה. ב – הוכחה. ג – הוכחה. ד – הוכחה.
7. א – הוכחה. ב – הוכחה. ג – הוכחה.

טריגונומטריה במישור

טיפים לפתרון שאלות טריגונומטריות – זכרו שלעומת גיאומטריה, המלאי הטריגונומטרי שלנו מאוד מצומצם: טריגונומטריה במשולש ישר זווית, משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ונוסחאות השטח הטריגונומטריות הם נושאי הייחוד בפרק זה. כאשר אתם תקועים עם אסטרטגיה מסוימת, חשבו על דרך אחרת בהתאם לסרגל הכלים. זכרו שאנחנו סוחרים את פרק הגיאומטריה גם בפרק הטריגונומטרי.



1. נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).

נתון כי $\angle DAC = \alpha$,

$\angle ADE = \beta$.

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β .

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) הראה כי $\triangle DEC$ הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .

2. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle AOB = \beta$, $\angle AOD = \alpha$.

א. הביעו באמצעות α , β ו-R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.

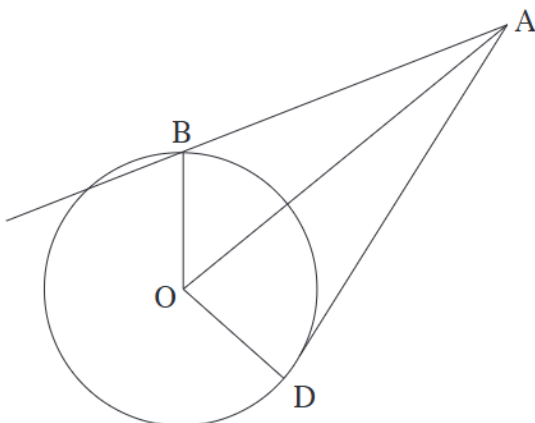
נתון: $AB = \sqrt{2} R$.

ב. הוכיחו כי $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

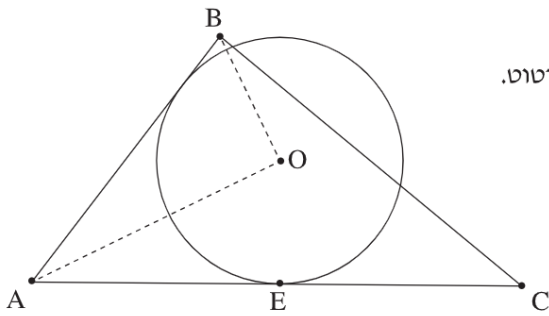
משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .



6. נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.



מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל.
הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט.

נתון: $BO \perp AO$, $AE = CE$.

נסמן ב- 2β את הזווית BAC.

א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$,

והזווית BAC היא זווית חדה.

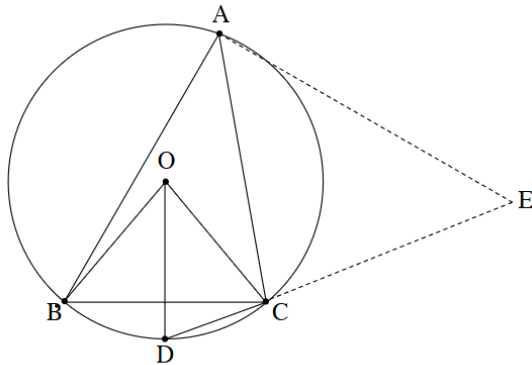
ב. מצאו את הערך של β .

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום את המשולש ABC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של R.

7. משולש ABC חד זווית חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.



הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ABC = 60^\circ$.

נסמן: $\angle BAC = \alpha$.

א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים

ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC

ובין שטח המשולש ODC הוא $2\sqrt{3} \sin(84^\circ)$.

ב. מצאו את הערך של α .

הנקודה E נמצאת על המשיך המיתר DC כך ש- $\angle CAE = 50^\circ$, כמתואר בסרטוט.

ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

טריגונומטריה במישור – תשובות:

1. א. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha}$. ב. הוכחה. ג(1). הוכחה. ג(2). $(R_1)^2(4 - \sqrt{3})$.
2. א(1). $AO = \frac{R}{\cos \alpha}$. א(2). $AB = R \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 - \frac{2 \cos \beta}{\cos \alpha}}$. ב. הוכחה. ג. $\alpha = 60.66^\circ, \beta = 39.13^\circ$.
3. א. הוכחה. ב(1). $\angle KCE = 45^\circ, \angle CEK = 90^\circ - \alpha, \angle CKE = 45^\circ + \alpha$. ב(2). $KE = \sqrt{2}R, CK = 2R \cos \alpha, CE = 2R \sin(45^\circ + \alpha)$. ג. $\frac{EB}{AE} = \cos(2\alpha)$. ד. 22.5° .
4. א(1). הוכחה. א(2). הוכחה. ב. $d_1 = \frac{R}{\cos \alpha}, d_2 = R \cdot \tan \alpha, d_3 = \frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}$. ג. $\alpha = 30^\circ$.
5. א. $\frac{k}{\cos \alpha}$. ב. $\alpha = 60^\circ$. ג. $\frac{k}{\sqrt{3}+1}$. ד. $k = 11.59$.
6. א. $\frac{R}{\sin \alpha \cos \alpha}$. ב. 65.565° . ג. 3.2 . ד. 7 .
7. א. $\frac{R^2 \sin \alpha}{2}$. $S_{\Delta ODC} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}R^2 \sin \alpha \sin(120^\circ - \alpha)$. ב. 36° . ג. $0.52R$.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות פולינום, מנה, ושורש:

טיפים לפתרון שאלות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי: רוב השאלה היא אלגברית, ותלויה ביסודות המתמטיקה שלמדנו בכיתה י'. לדוגמה: גזירת פונקציות מתקדמות (מנה, שורש...) נשענת על ידע גזירת פולינום. זכרו שבמחשבון יש לכם אופציה להציב ערכים בפונקציה, ואף הצבת ערכים בחישוב הנגזרת. מדובר באמצעי שמאשר לכם בזמן אמת את הגזירה והפתרון. זכרו ששאלה עם טעות בנגזרת נפסלת לחלוטין. סעיפי השאלה האחרונים הם סעיפי מחשבה שנשענים על ידע כגון קדם אנליזה, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, טכניקה אלגברית ועוד.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, כאשר a פרמטר המקיים $a \neq 0$.

א. האם הפונקציה f זוגית, אי זוגית, או לא זוגית ולא אי זוגית? הוכיחו.

ב. בטאו (בעזרת a בעת הצורך): (1) תחום הגדרה של f (2) נקודות חיתוך של f עם הצירים (3) אסימפטוטות מאונכות לצירים של f

ג. מצאו עבור אילו ערכי a יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x .

ד. הציבו $a = 5$ בפונקציה ושרטטו סקיצה עבור גרף הפונקציה f .

ה. הציבו $a = 5$ בפונקציה וענו על הסעיפים הבאים:

(1) רק על פי גרף הפונקציה, מצאו את התחום בו $f'(x)$ שלילית וגם f קעורה כלפי מטה (ח).

(2) נתונה הפונקציה $g(x) = (|f(x)|) + 3$. עבור אילו ערכי k למשוואה $g(x) = k$ יש:

(i) אפס פתרונות?

(ii) פתרון אחד?

(iii) שני פתרונות?

(iv) שלושה פתרונות?

2. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של f

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של f

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של f עם הצירים

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של f וסווגו אותן

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון הישר $y = mx - 5.5$ משיק לפונקציה בנקודה $x = 9$.

(1) מצאו את m .

(2) נתון הישר $g(x)$ מאונך למשיק y הנתון חותך את הישר y בנקודת ההשקה של y עם f . מצאו את משוואת הישר של $g(x)$.

ד. שרטטו את גרף הנגזרת השנייה של f .

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a}}$ $a > 0$ הוא פרמטר.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a בעת הצורך:

א. מצא את תחום ההגדרה של f .

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של f עם הצירים.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של f וסווגו אותן.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ תחום ההגדרה של g זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה f .

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וסווגו אותן.

ניתן לבצע רק לאחר למידת הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$: נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$ תחום ההגדרה של h זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה f .

ה. הסתמכו על סעיפים קודמים ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

4. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a הוא פרמטר.

הביעו את תשובותיכם בעזרת a בעת הצורך:

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) עבור אילו ערכים של a לפונקציה f אין נקודות קיצון? נמקו.

(2) במקרים שיש לפונקציה f נקודת קיצון, הביעו באמצעות a את שיעוריה וקבעו את סוגה.

ג סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מהתחומים $i - iii$ של הפרמטר a שלפניך:

$$a > 0 \quad (i)$$

$$a < 0 \quad (ii)$$

$$a = 0 \quad (iii)$$

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ד. (1) מצאו את התחום של הפרמטר a . נמקו.

(2) מצאו את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמקו.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$. a הוא פרמטר.

ענו על הסעיפים הבאים. הבחינו בעת הצורך בין התחום $a > 0$ לבין התחום $a < 0$ בתשובותיכם. הביעו את תשובותיכם בעזרת a בעת הצורך.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

(3) הוכיחו כי $f(x)$ פונקציה זוגית.

(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

(5) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של $f(x)$.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (הבחינו בין ערכי ה- a בעת הצורך).

ג. מצאו בעבור אילו ערכי a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y = 1$ או משיק לו.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$. b ו- c הם פרמטרים.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

נתון כי הפונקציה f זוגית.

ב. מצאו את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצאו את תחום ערכי c .

ד. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן. (הבע באמצעות c אם נדרש)

(2) מצאו את האסימפטוטה האופקית של f , וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ניתן לבצע רק לאחר למידת הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)}$: נתונה הפונקציה $g(x) = \left| \frac{1}{f(x)} \right|$.

ה. קבעו האם הפונקציה $g(x)$ זוגית, אי זוגית, או לא זוגית ולא אי זוגית. נמקו.

ו. מצאו את התחום בו $f(x)$ חיובית, ו- $f'(x)$ יורדת.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 1}{x^4 + x^2}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש).

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה (אם יש).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = -f(x)$.

היעזר בתשובותיך לסעיפים הקודמים ומצא את:

(1). שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וסוגן.

(2). האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש).

(3). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. הישר $y = kx$ משיק לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ($k \neq 0$).

סכום המרחקים של שתי נקודות ההשקה מציר ה- x הוא $\sqrt{2}$ יח'.

חשב את k עבור כל אחד מהמקרים הבאים:

(1). $k > 0$.

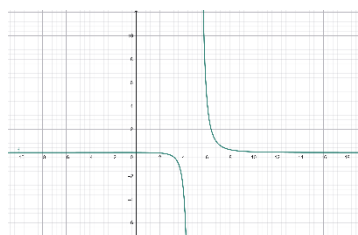
(2). $k < 0$.

ו. ניתן לבצע רק לאחר למידת הטרנספורמציה $\frac{1}{f(x)} - \sqrt{f(x)}$: נתונה הפונקציה $h(x) =$

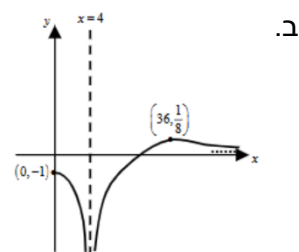
$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$. מצאו כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $h(x)$.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות פולינום, מנה, ושורש – תשובות:

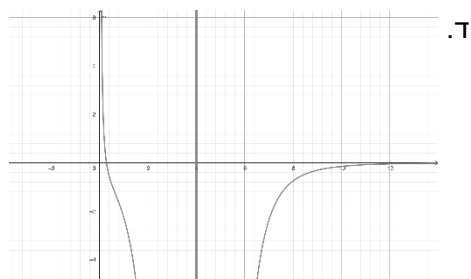
1. א. לא זוגית ולא אי זוגית. ב(1). $x \neq a$. ב(2). $(1,0), (0, \frac{1}{a^3})$. ב(3). $x = a, y = 0$. ג. $a > 1.5$.
 ד. ה(1). $x < 5$. ה(2). אפס פתרונות: $k \leq 3$.



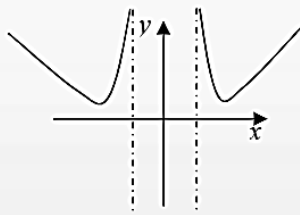
2. א(1). $x > 4$ או $0 \leq x < 4$. א(2). $x = 4, y = 0$. א(3). $(-1,0), (16,0)$. א(4). $\max(36, \frac{1}{8})$.
 ב. $\max(0, -1)$.



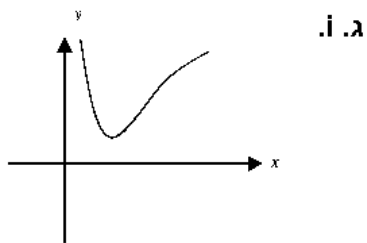
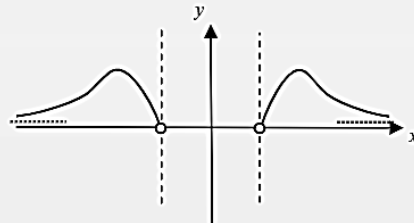
- ג(1). $m = \frac{1}{2}$. ג(2). $y = -2x + 17$.



3. פתרון: א. $x > a$ או $x < -a$ ב. הוכחה ג.1 אין ג.2 $x = a$, $x = -a$ ג.3 $(\sqrt{2a}, 2a) \min$, $(-\sqrt{2a}, 4a^2) \min$ ג.4 $(-\sqrt{2a}, 2a) \min$ ד.

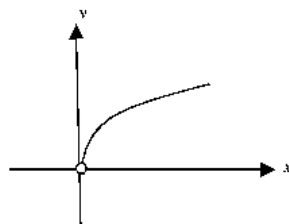


ה. 1. $\frac{71}{1296}$

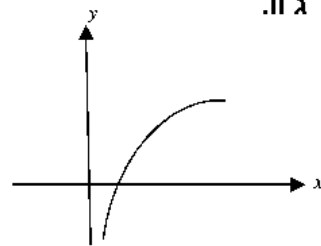


4. א. $x > 0$ ב.1 $a \leq 0$ ב.2 $(a, 2\sqrt{a}) \min$ ג.1

ג.1



ג.2



ד.1 $a > 0$ ד.2 $2\sqrt{a} < b$

5. א(1). עבור $a > 0$: $x \geq \sqrt{a}$ או $x \leq -\sqrt{a}$. עבור $a < 0$: $x \neq 0$.

א(2). עבור $a > 0$: $(\sqrt{a}, 0)$, $(-\sqrt{a}, 0)$. עבור $a < 0$: אין.

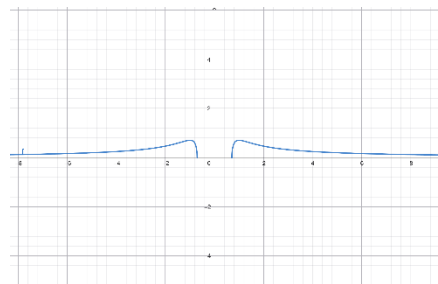
א(3). הוכחה.

א(4). עבור $a > 0$: עלייה בתחום $\sqrt{a} < x < \sqrt{2a}$ או $x < -\sqrt{2a}$. ירידה בתחום: $x > \sqrt{2a}$ או $-\sqrt{2a} < x < -\sqrt{a}$.

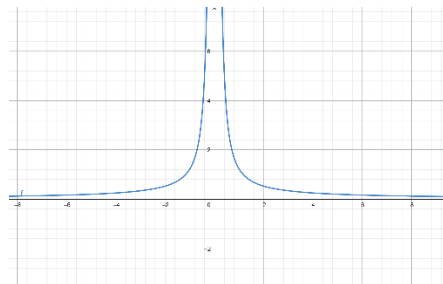
עבור $a < 0$: עלייה בתחום $x < 0$. ירידה בתחום $x > 0$.

א(5). עבור $a > 0$: $y = 0$. עבור $a < 0$: $x = 0$, $y = 0$.

ב. עבור $a > 0$:



עבור $a < 0$:



ג. $a < 0$ או $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

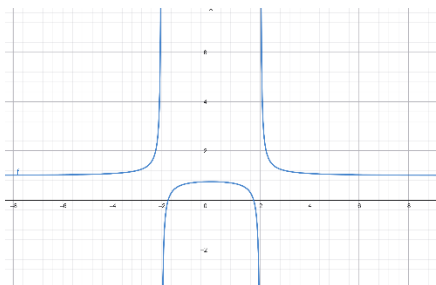
6. א. $x \neq \pm 2$.

ב. $b = 0$.

ג. $0 < c < 4$.

ד. (1) $\text{Max}\left(0, \frac{c}{4}\right)$

(2) $y = 1$



ה. זוגית.

ו. $-\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$.

7. א. $x \leq -1$ או $x \geq 1$.

ב. (1) $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

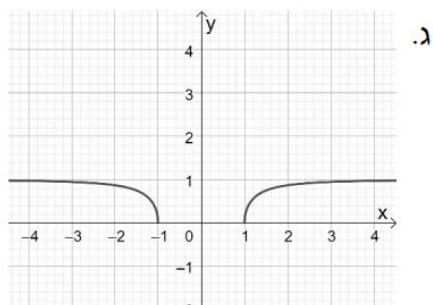
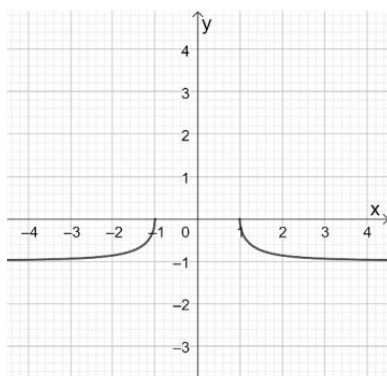
(2) $(1, 0)$ מינימום בקצה, $(-1, 0)$ מקסימום בקצה.

(3) $y = 1$.

ד. (1) $(1, 0)$ מקסימום בקצה, $(-1, 0)$ מינימום בקצה.

(2) $y = -1$.

(3)



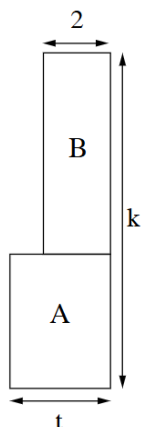
ו. 0.

ה. (1) $k = \frac{1}{2}$.

(2) $k = -\frac{1}{2}$.

בעיות קיצון בפונקציות מנה:

טיפים לפתרון שאלות קיצון: זכרו שאנחנו עוסקים בפונקציות מנה.. אם מתקבלת פונקציית מטרה אחרת – מרבית הסיכויים שיש טעות בדרך הפתרון. השאלה כולה נשענת על נגזרתה של פונקציית המנה, ולכן יש להתאמן רבות על הגזירה. לעיתים אנחנו ניאלץ לסמן מידע על גבי הבעיה כפרמטר, ומהנתונים לפתח אותו ליתרת הבעיה. זכרו שלפרמטרים שאנחנו מציבים צריך תמיד לבדוק תחום הגדרה: לדעת את הרביעים, תחום הגדרה של פונקציה וכו'.



1. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

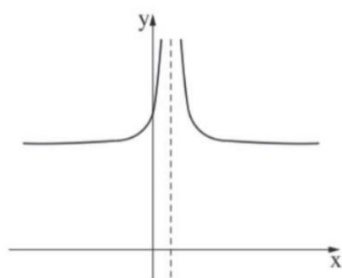
הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t + 2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות k ו- t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.



2. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 9$.

הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הנקודה C נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2.

דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B.

D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.

ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB.

ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

3. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

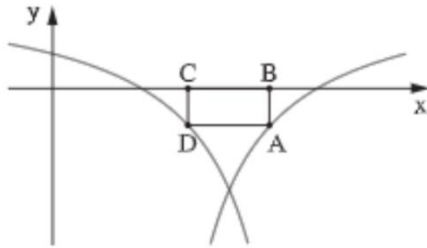
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה- x .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה- x , והצלע הנגדית, AD , מחברת

בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.



נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A .

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB .

(2) הוכח ששיעור ה- x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן $ABCD$.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

4. ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B ,

ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A .

הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון.

הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y .

הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט.

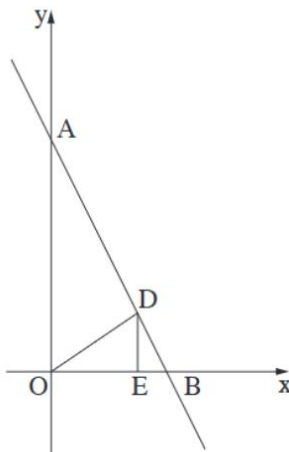
נסמן את אורך הקטע OE ב- p .

נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.

א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB .

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED

ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.



5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = t$.

נתון: $1 \leq t \leq 5$

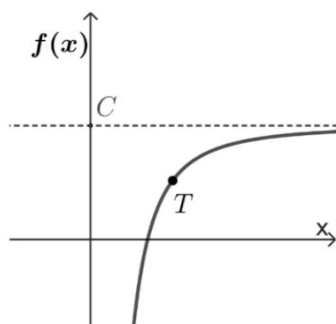
א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה זו.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B .

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ג. מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.



6.

בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$ בתחום $x > 0$.

הנקודה C היא נקודת החיתוך של האסימפטוטה לגרף הפונקציה עם ציר ה-y. בנקודה T הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

א. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה T ב-t.

(1) הביעו את משוואת המשיק באמצעות t.

(2) המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה T חותך את ציר ה-y

בנקודה A ואת האסימפטוטה לגרף הפונקציה המאונכת לציר ה-y בנקודה B.

הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות A ו-B.

(3) מצאו את הערך של t עבורו סכום הקטעים $CA + CB$ מינימלי.

7.

לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקציה, שעבורה $x = t$, $-1 < t < 1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה-x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה,

כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה-x.

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

בעיות קיצון בפונקציות מנה: פתרונות

1. א. $kt - t^2 - t$ ב. $\sqrt{k} - 1$ ג. $\sqrt{k} - 1$

2. א. $y = 6, x = 1$ ב. $y = -2ax + 5a + 6$ ג. $\frac{(3a+6)^2}{4a}$ ד. $a = 2$

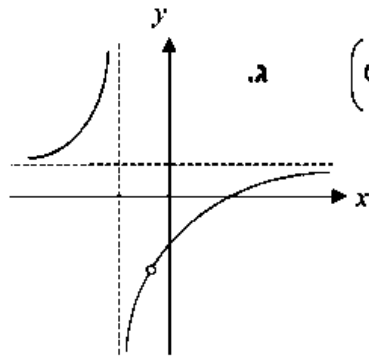
3. א(1). עבור $f: x \neq 3$ עבור $g: x \neq 1$ א(2). עבור $f: (1,0)$, עבור $g: (0, \frac{1}{3})$, עבור $g: (0,3), (3,0)$.

ב. $2 < t < 3$ ג(2). $\frac{(3-t)(2t-4)}{t-1}$ ד. $t = 2.41$

4. א. $y = -2x + 2p + 1$ ב. $p = 0.5$

5. א. $y = -\frac{3}{t^4}x + \frac{4}{t^3}$ ב. $t = \sqrt{3}$ ג. $t = 5$

6. א(1). $y = \frac{4}{t^3}x + 2 - \frac{6}{t^2}$ א(2). $A(0, 2 - \frac{6}{t^2})$, $B(\frac{2}{3}t, 2)$ א(3). $t = 2$



7. פתרון: א. $g(x)$ ב1. $x = -2, y = 1$ ב2. $(0, -\frac{1}{2}), (1,0)$ ג.

ד. $t = \sqrt{3} - 2$

שאלות קצרות: חשבון דיפרנציאלי של פונ' שורש, מנה ופולינום, טריגונומטריה וגיאוטרסה

טיפים: השאלות הקצרות עוסקות בכל החומר, בצורה מצומצמת אך מקיפה. בשאלות בהן יש להתאים פונקציה לסקיצה, חשוב להבחין בדברים המבדילים את הסקיצות האפשריות (תחומי עלייה וירידה, אסימפטוטות, קיצון, חיתוך עם הצירים, חורים...). ניתן לפתור כל שאלה בסגנון 'גיאוטרסי' בעזרת משפטים גיאוטרסיים וטריגונומטריים. אין הבדלה בין התרגילים. לעיתים יש שאלות קצרות עם 2 תתי סעיפים – זה אומר שרמת הקושי הכוללת שלו זהה לרמת קושי של תרגיל ללא תתי סעיפים, ולכן אם אחד מתתי הסעיפים זורם, ויתר השאלות הקצרות פחות – שווה לעשות חלק מהשאלות הקצרות, מה שמובן.

1. נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = BC$), שזוויות הבסיס שלו שוות כל אחת ל- α . BD , הגובה לבסיס, E -ו, הגובה לשוק, נפגשים בנקודה K .

$$\text{הוכיחו: } \frac{AK}{KE} = -\frac{1}{\cos(2\alpha)}$$

2. נתון טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

נתון: שטח המשולש ADC הוא 24, ושטח המשולש ADB הוא 12.

(1) חשב את היחס בין הבסיס הגדול לבין הבסיס הקטן של הטרפז.

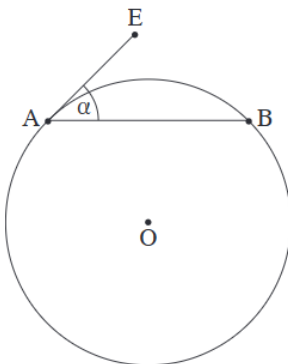
(2) חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

3. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x}$ המוגדרת לכל x השונה מ-0.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) נתונה הפונקצייה $g(x) = k \cdot f(x + 3)$, $k > 0$, הוא פרמטר.

מצאו את הערך של k שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקצייה $g(x)$ הוא 10. נמקו את תשובתכם.



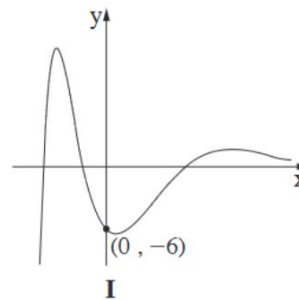
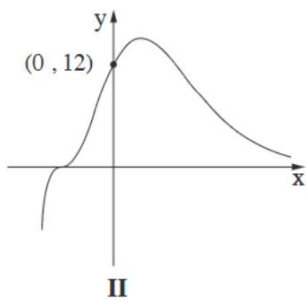
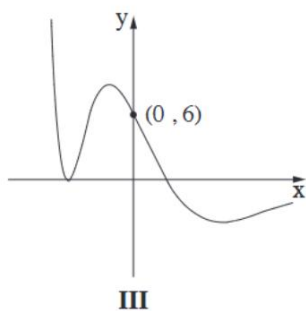
4. הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O . מעבירים משיק למעגל בנקודה A , והוא יוצר זווית של α מעלות עם המיתר AB (ראו סרטוט).

(1) הביעו באמצעות α את הזווית AOB .

(2) הביעו באמצעות α את היחס בין אורך הקשת הקטנה AB

ובין היקף המעגל.

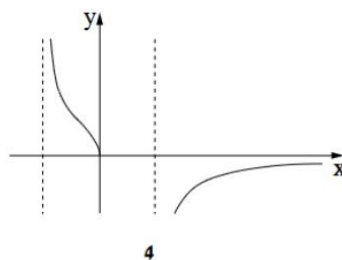
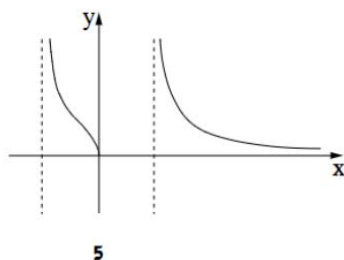
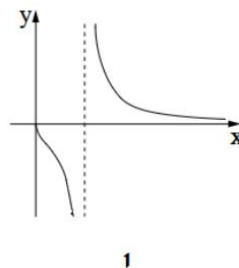
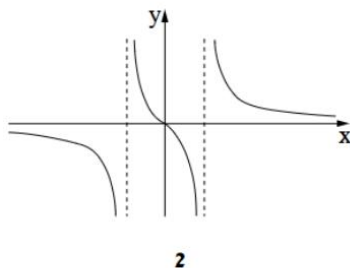
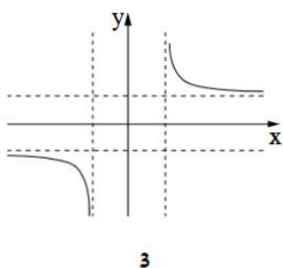
5. הפונקצייה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x . לפניכם שלושה גרפים I–III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x . על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y .

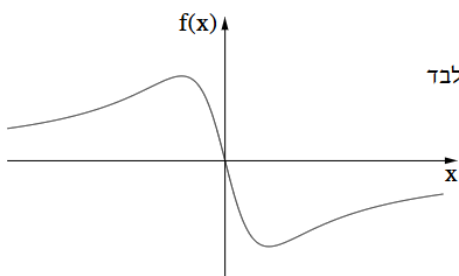


- (1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.
 (2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

6. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$.

- (1) מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$.
 (2) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ את הגרף המייצג אותה מבין הגרפים 1–5 שלפניכם. נמקו את קביעותיכם.



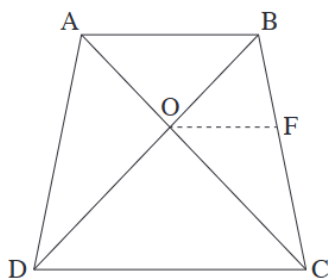


7. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$, מוגדרות לכל x .
 בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$.
 נתון כי הפונקצייה $f(x)$ היא אי-זוגית, ויש לה נקודת מינימום אחת בלבד ששיעוריה הם $(3, -6)$.
 לפונקצייה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$.
 (1) סרטוטו סקיצה אפשרית של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 נתונה הפונקצייה $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

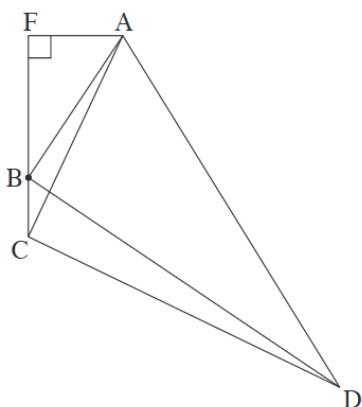
8. (1) הוכיחו את הזהות: $\frac{\sin(2\alpha - 2\beta)}{\cos(2\alpha) - \cos(2\beta)} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$.

(2) פתרו את המשוואה $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x) = \sin^2(x)$

(3) פתרו את המשוואה $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(4x)$ בתחום $[-80^\circ, 270^\circ]$



9. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).
 הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.
 נתון: $\angle BAO = \angle CDO$.
 (1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.
 הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.
 נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $BO = 9$, $DO = 12$.
 (2) מצאו את אורך הקטע OF .



10. המרובע $ABCD$ הוא בר חסימה במעגל, כך ש- AD הוא קוטר במעגל.
 הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB , כך ש- $FB \perp FA$.
 כמתואר בסרטוט שלפניכם.
 (1) הוכיחו: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.
 נתון: $\angle BDA = 24^\circ$.
 (2) מצאו את היחס בין שטח המשולש ACD ובין שטח המשולש AFB .

שאלות קצרות – תשובות:

(1) הוכחה.

(2) א. $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$. ב. $S_{ABCD} = 36$.

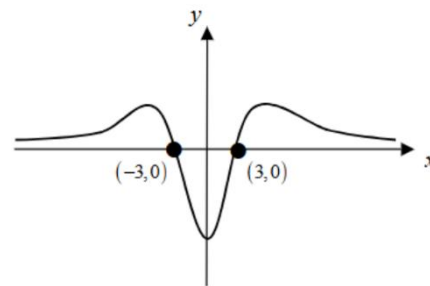
(3) א. $x = 0, y_{(+\infty)} = 2, y_{(-\infty)} = -2$. ב. $k = 2.5$.

(4) א. 2α . ב. $\frac{\alpha}{180^\circ}$.

(5) א. $f(x) \rightarrow II, f'(x) \rightarrow III, f''(x) \rightarrow I$. ב. 3.

(6) א. $f(x): x > 1, x < -1$. $g(x): x > 1, 0 \leq x < 1$. $h(x): -1 < x \leq 0, x > 1$.
ב. f : גרף 3. g : גרף 1, h : גרף 5.

(7) א. $(-3,0), (0,0), (3,0)$. ב.



(8) א. הוכחה. ב. $x = -30^\circ + 180^\circ k$. ג. $x = -60^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$.

(9) א. הוכחה. ב. $OF = 7.273$.

(10) א. הוכחה. ב. 6.045.