

חקירה מלאה של פונקציית מנה (רציונלית)

פונקציית מנה: פונקציה בצורת שבר, כאשר המונה והמכנה הם **פולינומים**.

לדוגמה:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

לפיכך, תחום ההגדרה של פונקציית מנה, הוא אוסף כל ערכי ה- x **שאינם מאפסים** את המכנה.

לדוגמה, נבדוק את תחום ההגדרה של $f(x)$ שהבאנו קודם לכן כדוגמה:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq \pm 1$.

תחום הגדרה: כל ערכי ה- x שהפונקציה יודעת לקבל. (להחזיר עבורם ערך y)

מבחינה גרפית, נאמר כי הפונקציה אינה רציפה בנקודות שאינן בתחום הגדרתה. כלומר, אם נצייר את הפונקציה – נפסיק לצייר בנקודות המפרות את תחום ההגדרה, אלא נצייר אך ורק ביתר הנקודות.

נקודות חיתוך עם הצירים:

לעומת פולינום, בפונקציית מנה **לא תמיד** יהיה נקודות חיתוך עם הצירים. נראה את הדוגמה הבאה:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

ראינו כי תחום ההגדרה הוא $x \neq \pm 1$

נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- y :

$$f(0) = \frac{2}{-1} = -2$$

נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x :

$$\frac{x+2}{x^2-1} = 0$$

$$x+2 = 0$$

$$x = -2$$

ולכן נקודות החיתוך עם ציר x הם $(-2,0)$ ונקודות החיתוך עם ציר y הם $(0,-2)$.

נקודות קיצון:

ראינו כי כל פונקציית מנה היא חלוקה של שני פולינומים. מכאן כי אפשר להגיד שלכל פונקציית מנה $f(x)$ ניתן לבטא אותה כך:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

כאשר $g(x), h(x)$ פולינומים.

לפי התצוגה הזו, נכיר את הנגזרת של כל פונקציה מהסוג $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

נראה דוגמה:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

נסמן: $g(x) = x+2, h(x) = x^2-1$

מכאן כי הנגזרת היא:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-1) - 2x(x+2)}{(x^2-1)^2}$$

נשווה את הנגזרת ל-0:

$$\frac{x^2-1-2x(x+2)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$x^2-1-2x^2-4x=0$$

$$-x^2-4x-1=0$$

$$x^2+4x+1=0$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

נבדוק בטבלת ערכים את הנק' החשודות:

X	-4	$-2-\sqrt{3}$	-2	-1	-0.5	$-2+\sqrt{3}$	0	1	2
F'	+	0	+	----	+	0	-	----	-
F	↗	----	↗	----	↗	Max($-2+\sqrt{3}, -1.866$)	↘	----	↘

ומכאן נקודת הקיצון של הפונקציה היא $(-2+\sqrt{3}, -1.866)$ והיא נקודת מקסימום.

!!אם בהשוואת הנגזרת לאפס לא נקבל פתרונות – ניצור טבלה עבור ערכי האיקס שאינם בתחום ההגדרה. כך נמצא תחומי עלייה וירידה, אך הנקודות אינן קיצון.

תחומי עלייה וירידה:

נצטרך להתחשב גם בנקודות הקיצון, וגם בנקודות המפרות את תחום ההגדרה של הפונקציה. נסתכל על הדוגמה שלנו.

מתוך הטבלה שלנו מתקיים:

תחום עלייה: $x < -2 + \sqrt{3}$ או $x - 1 < x < -1$ או $-2 - \sqrt{3} < x < -2$ או $x < -2 - \sqrt{3}$

תחום ירידה: $x > 1$ או $-2 + \sqrt{3} < x < 1$.

אסימפטוטות מאונכות לצירים:

סעיף חדש בחקירה כאשר אנו עוסקים בפונקציית מנה הוא אסימפטוטות מאונכות לצירים. נחלק את מושג האסימפטוטה לשניים:

אסימפטוטה אנכית היא ההתנהגות של הפונקציה בסביבת הנקודות שאינן בתחום הגדרתה.

כיצד נמצא אסימפטוטה אנכית?

לכל נקודה a שאינה בתחום ההגדרה של $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, אם $h(a) = 0$ וגם $g(a) \neq 0$ אזי הישר $x = a$ אסימפטוטה אנכית של $f(x)$.

אם $h(a) = 0$ וגם $g(a) = 0$, מכאן כי יש גורם משותף שניתן לצמצם בין המונה והמכנה. אם לאחר הצמצום מצאנו $x = a$ עבורו המכנה מתאפס, והמונה אינו מתאפס – הישר $x = a$ הוא אסימפטוטה אנכית.

אם קיבלנו לאחר הצמצום שהמכנה **לא מתאפס** – מכאן כי $x = a$ הוא לא אסימפטוטה אנכית, אלא 'חור' בגרף.

נסתכל על הדוגמה שלנו: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. תחום ההגדרה הוא $x \neq \pm 1$. ננסה להציב את הערך 1:

$$f(1) = \frac{1+2}{1^2-1} = \frac{3}{0}$$

קיבלנו שהמונה לא מתאפס, והמכנה כן מתאפס עבור $x = 1$, ולכן הישר $x = 1$ אסימפטוטה אנכית של $f(x)$.

ננסה כעת להציב את הערך -1:

$$f(-1) = \frac{-1+2}{(-1)^2-1} = \frac{1}{0}$$

קיבלנו בשנית שהמונה לא מתאפס, והמכנה כן מתאפס עבור $x = -1$, ולכן הישר $x = -1$ אסימפטוטה אנכית של $f(x)$.

אסימפטוטה אופקית היא ההתנהגות של הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף, ולמינוס אינסוף.

עבור הפונקציה $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, כאשר $x \rightarrow \pm\infty$, אם המעריך הגבוה ביותר של המונה והמכנה **שווים**, אזי האסימפטוטה האופקית היא מנת המקדמים של ביטויי ה- x הללו.

לדוגמה, עבור הפונקציה $f(x) = \frac{(x+5)}{(2x-1)}$, המעריך הגבוה ביותר של המונה והמכנה זהה (1), עבור הביטויים x ו- $2x$. לפיכך האסימפטוטה האופקית היא $\frac{1}{2}$. (מנת המקדמים).

אם המעריכים הגבוהים ביותר **שווים**, נפשט את הפונקציה ככל האפשר. אם לא הצלחנו לבטל אף גורם לכדי קבלת המצב הראשון (מעריכים שווים), נצטרך להוציא כגורם משותף את הביטוי בעל המעריך הגבוה ביותר **במכנה**.

נסתכל על הדוגמה שלנו:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

נשים לב שכאשר אנחנו מחלקים מספר קבוע ב- $\pm\infty$, נקבל ביטוי השואף לאפס. לפיכך ניתן לפשט:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

ולכן $y = 0$ אסימפטוטה אופקית של $f(x)$.

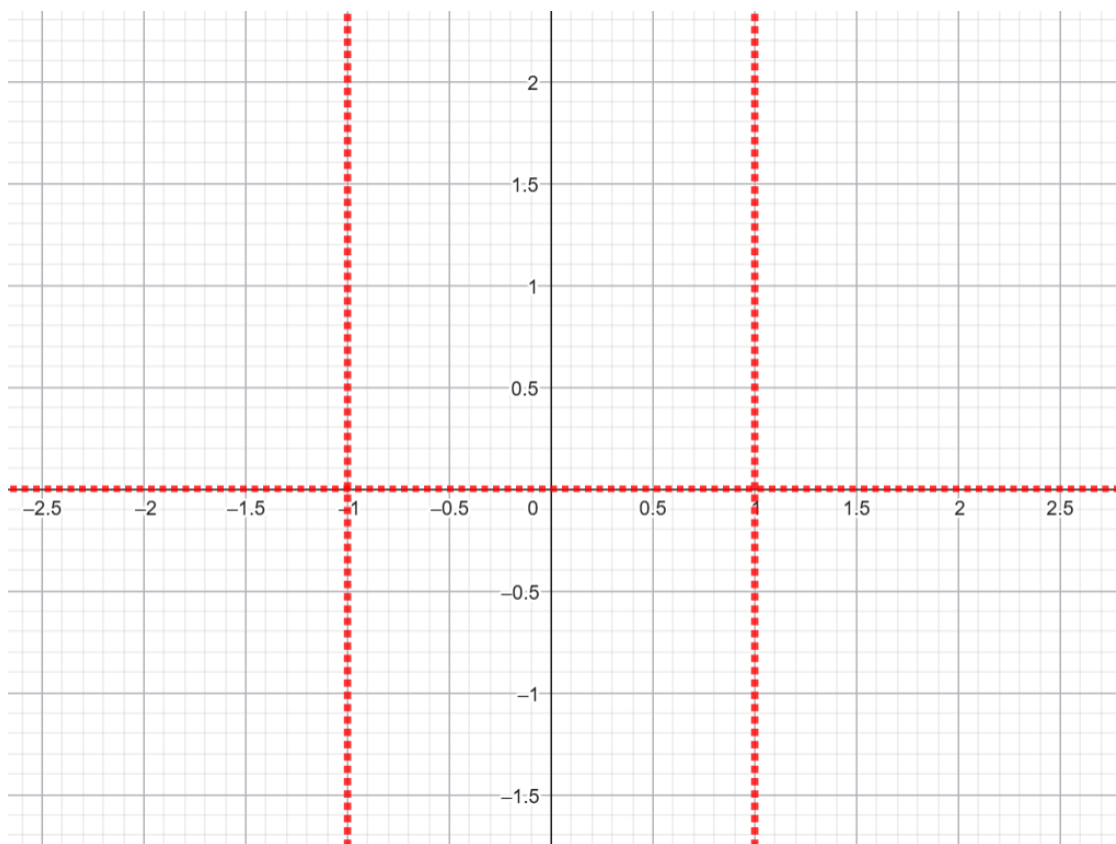
שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה:

כאשר אנחנו נרצה לשרטט את סקיצת הפונקציה, נתייחס ראשית לתחום ההגדרה ולאסימפטוטות המאונכות לצירים. נסמן אסימפטוטות באמצעות ישר מקווקו.

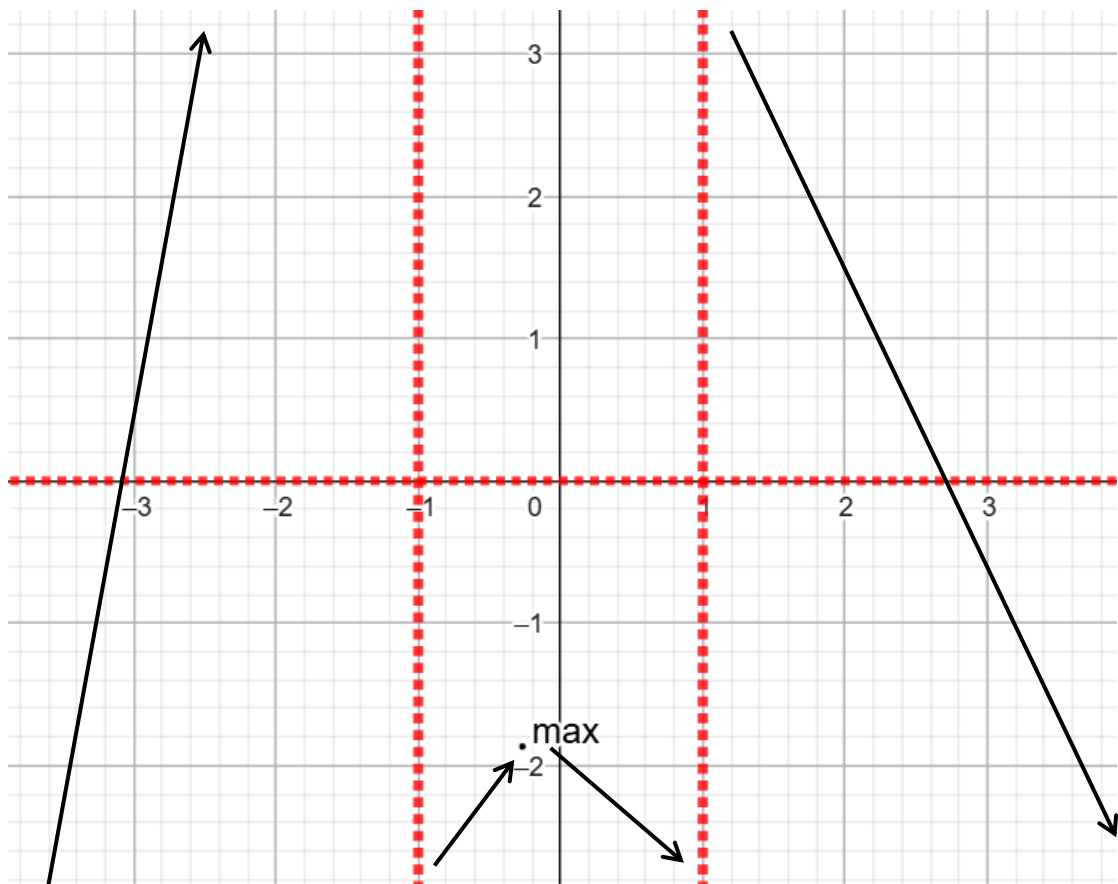
לאחר מכן, נתייחס לתחומי העלייה והירידה על מנת לקבוע את תבנית הפונקציה. נשים לב שבשרטוט הסקיצה, כאשר אנו מדברים על פונקציית מנה, אנו לא צפויים לקבל פונקציה רציונלית, כלומר – נצטרך להתייחס ל'חורים' ו'שבירות' במהלך הפונקציה.

לדוגמה, $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. ראינו שהאסימפטוטות האנכיות הן $x = \pm 1$, והאסימפטוטה האופקית היא $y = 0$.

נשרטט זאת במערכת הצירים:



נשרטט את תחום העלייה/ירידה ונקודת הקיצון:



נזכור שהאסימפטוטות מהוות מעין "מגנט" לפונקציה, ומקרבות אותה אליהן. בנוסף נשים לב לנקודות החיתוך עם הצירים שמצאנו. לפיכך גרף הפונקציה הסופי יהיה:

