

סיכום לבגרות במכניקה - עבודה ואנרגיה

עבודה: עבודה היא ממד פיזיקלי המייצג את כמות האנרגיה המועברת לגוף או ממנו, כתוצאה מהפעלת כוח. העבודה היא גודל סקלרי, ולא וקטורי, ומסומנת W . יחידות המידה של העבודה: ג'אול: J .

נוסחאות:

- מכפלה וקטורית לפי רכיבים: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$.

- מכפלה וקטורית לפי אורך וזווית הווקטורים: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$, כאשר α היא הזווית שבין הווקטורים.

- עבודה של כוח קבוע: $W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{x}| \cdot \cos(\alpha)$. העבודה שכוח F הפועל על גוף מסוים מבצע, שווה למכפלה הווקטורית בין הכוח הפועל על הגוף לבין ההעתק שעובר כתוצאה מהפעלת הכוח.

- עבודה של כוח משתנה: $W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$. במילים אחרות, העבודה שכוח מבצע על גוף מסוים, שווה לשטח הכלוא מתחת לעקומת הכוח כתלות במקום.

- עבודה הכוללת שמתבצעת על גוף מסוים: $W_{total} = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots + W_{F_n}$. כלומר, העבודה הכוללת המתבצעת על גוף מסוים היא סכום העבודות שכל כוח הפועל על הגוף מבצע.

דוגמאות:

שאלה ראשונה: תומר מושך במשך 10 שניות חוט המחובר לכדור שמסתו 2kg , התלוי באמצעות חוט אחר לתקרה. הזניחו את מסת החוטים ואת התנגדות האוויר. ידוע כי הכוח שבו מושך תומר את החוט התחתון הוא F . הכדור יורד למטה בצורה אנכית במהירות קבועה $v = 3 \left[\frac{m}{s} \right]$.

(1) הוכיחו שגודל מתיחות החוט התחתון היא F וכיוונה מטה.

נתון, $F = 12(N)$.

(2) חשבו את מתיחות החוט העליון.

(3) האם מתבצעת על הכדור עבודה כוללת? נמקו.

פתרון:

(1) על פי החוק השלישי של ניוטון, $F_{1 \rightarrow 2} = -F_{2 \rightarrow 1}$, אבל שני הכוחות פועלים לאותו כיוון, לכיוון מטה, ולכן מתקיים: $F = T_{\text{תחתון}}$, ולכן $T_{\text{תחתון}} = F$.

(2) נשים לב: $F = T_{\text{תחתון}} = 12[N]$, $mg = 20[N]$. הכדור נע במהירות קבועה, ולכן המערכת בהתמדה, ועל פי החוק הראשון של ניוטון, שקול הכוחות האנכי הוא 0:

$$T_{\text{עליון}} - T_{\text{תחתון}} - mg = 0$$

$$T_{\text{עליון}} - 12 - 20 = 0$$

$$T_{\text{עליון}} = 32[N]$$

(3) נחשב את ההעתק שמבצע הכדור:

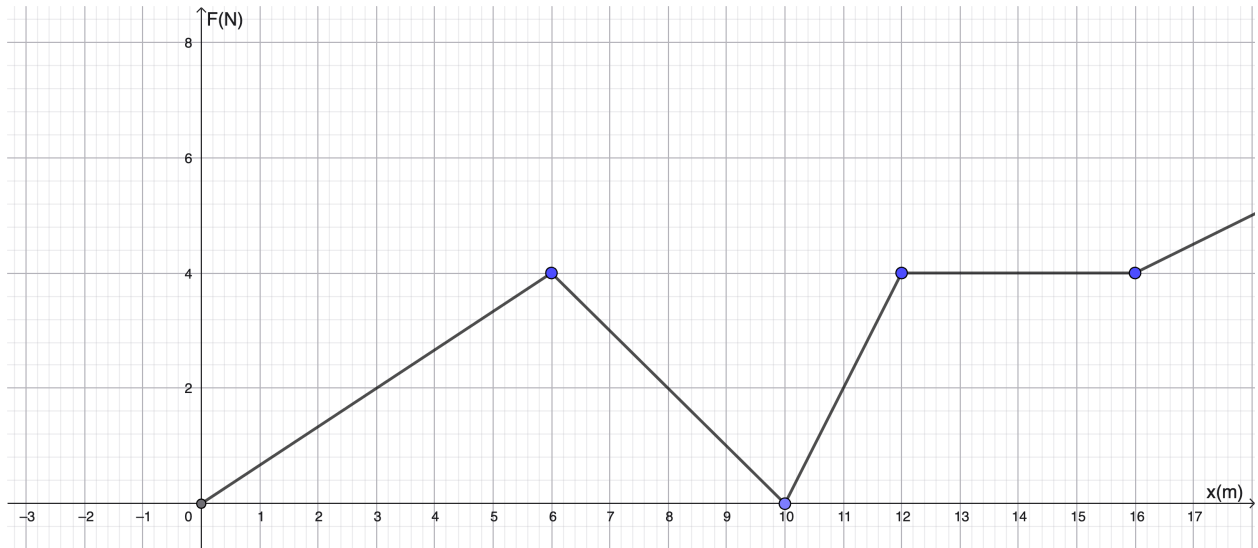
$$\Delta y = v\Delta t = 3 * 10 = 30m$$

כעת נחשב עבור כל כוח את עבודתו, ונסכום לקבלת העבודה הכוללת:

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= W_{T_{\text{תחתון}}} + W_{mg} + W_{T_{\text{עליון}}} \\ &= |T_{\text{תחתון}}| \cdot |\Delta y| \cdot \cos(0) + |mg| \cdot |\Delta y| \cdot \cos(0) + |T_{\text{עליון}}| \cdot |\Delta y| \cdot \cos(180^\circ) \\ &= 30(12 + 20 - 32) = 0[J] \end{aligned}$$

ולכן לא מתבצעת על הכדור עבודה כוללת.

שאלה שנייה: לפניכם גרף כוח כתלות במקום, המתאר את הכוח F הפועל על מכונית נוסעת.



(1) אם ידוע שהמכונית נוסעת על כביש אופקי חלק, באילו מיקומים תהיה המכונית במצב של 'התמדה'?

(2) חשבו את העבודה המבצע הכוח F על המכונית בין המיקומים $0 < x < 16m$.

פתרון:

(1) אם המכונית נוסעת על כביש חלק, הכוח האופקי היחיד שפועל על המכונית הוא F , כלומר, שקול הכוחות יהיה F . על פי חוק 1 של ניוטון, הגוף מתמיד במצבו כאשר שקול הכוחות הפועלים עליו הוא 0, ולכן המכונית תהא בהתמדה כאשר $F = 0$, כלומר, במיקומים $x = 0, 10m$.

(2) מכיוון שמדובר בכוח משתנה, עלינו למצוא את העבודה באמצעות חישוב השטח הכלוא מתחת לגרף:

$$W_F = \frac{10 * 4}{2} + \frac{(4 + 6) * 4}{2} = 20 + 20 = 40[J]$$

אנרגיה: אנרגיה היא הגורם להתממשות תופעות ושינויים פיזיקליים, אלו שהעין האנושית מבחינה בהם, ואלו שלא. לדוגמה: נסיעת מכונית או תזוזת כדור הארץ סביב צירו. נהוג להגדיר אנרגיה כיכולת של גוף או מערכת לבצע עבודה. אנרגיה היא גודל פיזיקלי סקלרי הנמדד ביחידות מידה של J.

סוגי אנרגיות פשוטות:

- **אנרגיה קינטית:** אנרגיה קינטית, או אנרגיית תנועה, היא היכולת של גוף לבצע עבודה מעצם היותו נע. לדוגמה: מכונית נוסעת, כדור נזרק... מסומנת E_k .
האנרגיה הקינטית מוגדרת באופן הבא:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

כלומר, מחצית ממכפלת מסת הגוף הנע עם ריבוע מהירות התנועה שלו.

- **אנרגיה פוטנציאלית-כובדית:** אנרגיה פוטנציאלית כובדית, או אנרגיית גובה, היא האנרגיה האצורה בגוף הנמצא בנקודה מעל הקרקע, או כל משטח ייחוס אחר. מדובר במעין "אנרגיה ממתינה", שתממש את הפוטנציאל שלה ברגע עזיבת הגוף מן הנקודה בו מצוי. מסומנת U_G .
האנרגיה הפוטנציאלית-כובדית מוגדרת באופן הבא:

$$U_G = mgh$$

כלומר, מכפלת מסת הגוף עם תאוצת הנפילה החופשית ועם הגובה מעל משטח הייחוס בו מצוי הגוף.

- **אנרגיה פוטנציאלית-אלסטית:** אנרגיה פוטנציאלית אלסטית היא אנרגיה האגורה בחומרים גמישים (כמו קפיצים, גומיות או חץ וקשת) כתוצאה משינוי צורתם – מתיחה או דחיסה. מסומנת U_{sp} .

האנרגיה הפוטנציאלית-אלסטית מוגדרת באופן הבא:

$$U_{sp} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$$

כלומר, מחצית ממכפלת קבוע הגוף האלסטי (בדומה לקבוע הקפיץ שהכרנו בחוק הוק) כפול ריבוע השינוי באורך הגוף האלסטי (בדומה לשינוי באורך הקפיץ שהכרנו בחוק הוק).

דוגמה:

בבניין ברחובות מתבצע ניסוי במעלית משא שמסתה $m = 100[kg]$.

(1) בשלב הראשון בניסוי, המעלית נמצאת במנוחה בקומת הקרקע. על רצפת המעלית מונח קפיץ רפוי. הזניחו את מסת הקפיץ. מצאו את כמות האנרגיה הפוטנציאלית-כובדית והפוטנציאלית-אלסטית של המעלית במצב זה.

(2) כעת המנוע של המעלית מבצע עבודה של $30,000[J]$ ומעלה את המעלית לגובה של $25[m]$. בשיא הגובה המעלית עוצרת לרגע. חשבו את האנרגיה הפוטנציאלית-כובדית של המעלית בגובה זה. הסבירו את הפער בין התוצאה שחישבתם לבין העבודה שמבצע המנוע.

(3) כשהמעלית בגובה $25[m]$, מניחים על הקפיץ שעל הרצפה משקולת קטנה שמכווצת אותו ב- $20[cm]$. ידוע כי קבוע הקפיץ הוא $k = 1000 \left[\frac{N}{m} \right]$. חשבו את האנרגיה הפוטנציאלית-אלסטית של הקפיץ.

(4) כעת משחררים את המערכת והיא מתחילה לרדת. ברגע מסוים, המהירות שלה היא $4 \left[\frac{m}{s} \right]$. מה היא האנרגיה הקינטית של המעלית ברגע זה?

פתרון:

(1) המערכת נמצאת במנוחה בקומת הקרקע, על משטח הייחוס. לכן $h = 0$, ומכאן על פי נוסחת אנרגיה פוטנציאלית כובדית, $U_G = 0$, $U_G = mgh$. נתון שהקפיץ רפוי, כלומר לא מתבצע שינוי באורכו, $\Delta \ell = 0$. מכאן, על פי נוסחת אנרגיה פוטנציאלית אלסטית, $U_{sp} = 0$, $U_{sp} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2$.

(2) הגובה מעל משטח הייחוס הוא $h = 25[m]$. מסת המעלית היא $100[kg]$ ומכיוון שמדובר בניסוי בעיר רחובות, תאוצת הנפילה החופשית היא של כדור הארץ, $g = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$. על פי נוסחת אנרגיה פוטנציאלית כובדית, $U_G = mgh = 100 * 10 * 25 = 25,000[J]$. נשים לב שכביכול נעלמה אנרגיה בסך של $5,000[J]$ ביחס לעבודה של מנוע המעלית, מה שנגרם לדוגמה על ידי התחממות המנוע וחיכוך עם כבלי המעלית.

(3) נסכם את הנתונים: $k = 1,000 \left[\frac{N}{m} \right]$, $\Delta \ell = 0.2[m]$. נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית אלסטית של הקפיץ: $U_{sp} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} * 1000 * 0.04 = 20[J]$.

(4) נסכם את הנתונים: $m = 100[kg], v = 4 \left[\frac{m}{s}\right]$. נחשב את האנרגיה הקינטית של המעלית:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} * 100 * 4 = 200[J]$$

משפט עבודה-אנרגיה: קודם לכן ראינו כי על מנת למצוא את העבודה הכוללת המתבצעת על הגוף, יש לסכום את העבודות המבצעים כל הגופים הפועלים על הגוף (עבודת הכוח השקול). כעת כשהכרנו את מושג האנרגיה, נוכל לשים דגש על קשר בין העבודה הכוללת המתבצעת על גוף, לאנרגיה הקינטית שלו:

$$W_{total} = \Delta E_k$$

במילים אחרות, העבודה הכוללת המתבצעת על גוף מסוים, שווה לשינוי באנרגיה הקינטית שלו.

דוגמה:

משאית נעה על כביש אופקי במהירות v . הנהג מבחין במכשול, לוחץ על הבלמים בכל הכוח ונעצר לאחר מרחק בלימה של $20m$. הניחו כי כוח החיכוך שהבלמים מפעילים על הגלגלים הוא קבוע.

אם אותה משאית בדיוק הייתה נוסעת באותו כביש, במהירות **כפולה**, והנהג היה בולם באותו הכוח - מה יהיה מרחק הבלימה שלה עד לעצירה מוחלטת?

פתרון:

נסתכל על המצב ההתחלתי:

$$E_{k_i} = \frac{1}{2}mv^2, E_{k_f} = 0$$

לכן $W_{total} = \Delta E_k = -\frac{1}{2}mv^2$, לפי משפט עבודה-אנרגיה.

העבודה הכוללת היא בעצם עבודת הכוח השקול שפועל על המשאית - כוח החיכוך בלבד:

$$W_{f_k} = W_{total} = -\frac{1}{2}mv^2$$

$$f_k \Delta x = -20f_k = -\frac{1}{2}mv^2$$

כעת נסתכל על המצב השני :

$$E_{k_i} = \frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2, E_{k_f} = 0$$

ומתקיים לפי חוק עבודה-אנרגיה :

$$W_{total} = \Delta E_k = -2mv^2$$

ראינו שהעבודה הזו שקולה לכוח החיכוך הפועל על המשאית :

$$W_{f_k} = W_{total} = -2mv^2$$

$$-f_k \Delta x = -2mv^2$$

$$f_k = \frac{2mv^2}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{40}mv^2 = \frac{2mv^2}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{40} = \frac{2}{\Delta x}$$

$$\Delta x = 80m$$

כלומר מרחק הבלימה החדש הוא 80 מטרים, פי 4 ממרחק הבלימה המקורי.

כוח משמר: כוח שעבודתו על גוף המועבר מנקודה אחת לנקודה שנייה אינה תלויה במסלול המחבר בין שתי הנקודות. לדוגמה - כוח הכובד הוא כוח משמר, כי לא משנה דרך איזה מסלול נעביר גוף מנקודה A לנקודה B, יופעל עליו כוח כובד בגודל זהה ביחס לזווית המישור.

הכוחות המשמרים במכניקה: כאמור, כוח הכובד, כוח אלסטי של קפיץ (חוק הוק), וכוח הגרביטציה, הרלוונטי יותר לפרק הכבידה.

עבודת הכוחות המשמרים: לכל כוח משמר ניתן להגדיר אנרגיה פוטנציאלית המקיימת: U יכול להיות אנרגיה פוטנציאלית-כובדית או אלסטית, בהתאם לסוג הכוח המשמר)

$$W_{\text{כוח משמר } A \rightarrow B} = -\Delta U = U_A - U_B$$

כלומר, עבודת כוח משמר הפועל על גוף שנע מנקודה A לנקודה B, שווה לפחת באנרגיה הפוטנציאלית של הגוף בין הנקודות הללו. הנוסחה רלוונטית אך ורק לעבודת כוח משמר.

אנרגיה מכנית: סוג מורכב יותר של אנרגיה הוא אנרגיה מכנית. אנרגיה מכנית היא שקול האנרגיה הקינטית עם כל האנרגיות הפוטנציאליות של גוף מסוים:

$$E_{\text{מכנית}} = E_k + U$$

עבודת הכוחות הלא משמרים: עבודת הכוחות הלא משמרים שווה לשינוי באנרגיה המכנית:

$$W_{\text{לא משמרים}} = \Delta E_{\text{מכנית}}$$

חוק שימור האנרגיה: משמעות ההגדרה לעבודת הכוחות הלא משמרים היא, שעבור מערכת בה **עבודת הכוחות הלא משמרים היא 0** (כגון עבודת החיכוך או עבודת הכוח נורמלי) האנרגיה המכנית נשמרת בין כל נקודה ונקודה, שכן:

$$\Delta E_{\text{מכנית}} = 0$$

$$E_{\text{מכנית}}(A) = E_{\text{מכנית}}(B)$$

מכאן מתקבלת נוסחת חוק שימור האנרגיה, הרלוונטית עבור מערכת בה עבודת הכוחות הלא משמרים היא 0:

$$E_k(A) + U(A) = E_k(B) + U(B)$$

$$E_k(A) + U_G(A) + U_{sp}(A) = E_k(B) + U_G(B) + U_{sp}(B)$$

$$\frac{1}{2}m(v_A)^2 + mgh_A + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_A)^2 = \frac{1}{2}m(v_B)^2 + mgh_B + \frac{1}{2}k(\Delta\ell_B)^2$$

דוגמה:

גוף שמסתו $m = 2[kg]$ מונח על קפיץ אנכי המחובר לרצפה. קבוע הקפיץ הוא $k = 400[N/m]$. בתחילה, הקפיץ מכווץ ב- $\Delta \ell = 1m$ על ידי הגוף (הגוף מוחזק שם).

משחררים את הגוף ממנוחה, הקפיץ נפתח "ויורה" את הגוף למעלה.

(1) מה היא האנרגיה המכנית הכוללת של המערכת ברגע השחרור?

(2) מה תהיה האנרגיה הקינטית של הגוף ברגע שבו הקפיץ חוזר לאורכו הרפוי?

(3) מה הוא הגובה המקסימלי שאליו יגיע הגוף, ביחס לנקודת השחרור?

פתרון:

(1) נסכם את הנתונים: $m = 2[kg], k = 400 \left[\frac{N}{m} \right], \Delta \ell = 1m, h_0 = 0, v_0 = 0$

מכאן ניתן לקבוע כי ברגע השחרור יש רק אנרגיה פוטנציאלית אלסטית, ולכן האנרגיה המכנית הכוללת ברגע זה תהיה:

$$E_{\text{מכנית}} = E_k + U_G + U_{sp} = 0 + 0 + U_{sp} = U_{sp} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} * 400 * 1 = 200[J]$$

(2) ברגע בו הקפיץ חוזר להיות רפוי, הגוף בגובה המקסימלי אליו הגיע הקפיץ, $h = 1m$. נשים לב שחוץ מכוח הקפיץ וכוח הכובד, לא פועל על הגוף שום כוח אחר. משום שכוח הקפיץ וכוח הכובד הם כוחות משמרים, עבודת הכוחות הלא משמרים היא 0, ויש שימור אנרגיה במערכת:

$$E_{\text{מכנית}}(\text{רגע השחרור}) = E_{\text{מכנית}}(\text{הקפיץ שוב רפוי})$$

$$200 = E_k(\text{הקפיץ שוב רפוי}) + U_G(\text{הקפיץ שוב רפוי}) + U_{sp}(\text{הקפיץ שוב רפוי})$$

$$200 = E_k(\text{הקפיץ שוב רפוי}) + mgh_{\text{הקפיץ שוב רפוי}} + 0$$

$$200 = E_k(\text{הקפיץ שוב רפוי}) + 20$$

$$E_k = 180[J]$$

(3) בגובה המקסימלי המהירות של הגוף תהא 0, ולכן לא תהיה לו אנרגיה קינטית. הגוף כבר מזמן לא נוגע אפילו בקפיץ, ולכן גם לא תהיה לו אנרגיה פוטנציאלית-אלסטית. שימור האנרגיה שהוסבר בסעיף הקודם כמובן ממשיך איתנו, ולכן:

$$E_{\text{מכנית}}(\text{רגע שחרור}) = E_{\text{מכנית}}(\text{שיא})$$

$$200 = U_G(\text{שיא})$$

$$200 = mgh_{\text{שיא}} = 20h_{\text{שיא}}$$

$$h_{\text{שיא}} = 10[m]$$