

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

הקדמה - פתרון משוואות מעריכיות

המילה "מעריך" מוכרת לנו מעולם החזקות. נזכיר את הטרמינולוגיה: a^b הוא ביטוי מתמטי המייצג חזקה, כאשר a נקרא "בסיס החזקה" ו- b נקרא "מעריך החזקה". לצורך הנוחות נכנה את a "הבסיס" ואת b "המעריך".

דוגמאות:

חזקה ובה הבסיס הוא 3 והמעריך הוא 4 - 3^4 . חזקה ובה הבסיס הוא 2 והמעריך הוא (-3) - 2^{-3} .

חזקה ובה הבסיס הוא 4 והמעריך הוא $\frac{1}{3}$: $4^{\frac{1}{3}}$.

עד כה בעולם המתמטיקה, עסקנו בפתרון משוואות ליניאריות, ריבועיות, ומשוואות דו-ריבועיות הניתנות לפתרון ע"י הוצאת גורם משותף או הצבה. בהמשך התעסקנו גם בפתרון משוואות רציונליות (מנה) ומשוואות אי-רציונליות (שורש). כעת נכיר סוג חדש של משוואות - משוואות מעריכיות.

משוואה מעריכית היא משוואה שבה x הוא לא בסיס החזקה, כפי שהתרגלנו, אלא דווקא המעריך. דרך הפתרון קבועה: תמיד נשאף לקבל בשני האגפים אותו בסיס בודד, עם מעריכים שונים, ואותם נשווה לקבלת משוואה שאנו כבר יודעים לפתור. הדבר שישתנה הוא הדרך והכלים שבהם נגיע למצב רצוי זה.

לדוגמה:

$$9 \cdot 3^x = 81 \rightarrow 3^x = \frac{81}{9} \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$$

דרך נוספת (חוקי חזקות):

$$9 \cdot 3^x = 81 \rightarrow 3^2 \cdot 3^x = 3^4 \rightarrow 3^{x+2} = 3^4 \rightarrow x + 2 = 4 \rightarrow x = 2$$

ניתן להרכיב משוואות מעריכיות מסובכות יותר, אשר דורשות מאיתנו שליטה מלאה בחוקי החזקות:

יהיו a, b, n, m מספרים ממשיים כלשהם, אזי:

$$1. a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad 2. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad 3. \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$4. (a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n \quad 5. a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad 6. \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$7. (ab)^n = a^n b^n \quad 8. a^0 = 1 \text{ לכל } a \neq 0 \quad 9. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

בעזרת הכלים הללו, שמומלץ מאוד לשנן בע"פ לאחר תרגול רב, נוכל לפתור משוואות, ובהמשך גם אי-שוויונים, מעריכיים ברמת הבגרות.

לעיתים אף נרצה להשתמש בכלי חזק יותר לפתרון משוואה מעריכית ייחודית - כלי ההצבה. נזהה כאשר הביטויים בעלי המעריך המשתנה במשוואה מקיימים קשר מסוים (לדוגמה, אחד מהם מהווה ריבוע של השני), וע"פ זאת נבצע את ההצבה.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

דוגמאות לפתרון משוואות מעריכיות:

$$8^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

לרוב נרצה להעביר את הבסיסים לצורה הבסיסית והמפושטת ביותר - בסיס ראשוני (2,3,5,7,11,13,...).
בתרגיל שלנו קל לזהות שהבסיסים רומזים על בסיס יסוד 2:

$$(2^3)^x = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{x-1}$$

ניעזר בחוק חזקות: $(a^m)^n = a^{mn}$:

$$2^{3x} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{x-1}$$

ניעזר בחוק חזקות: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$:

$$2^{3x} = (2^{-2})^{x-1}$$

ניעזר שוב בחוק חזקות: $(a^m)^n = a^{mn}$:

$$2^{3x} = 2^{2-2x}$$

קיבלנו בשני האגפים את אותו הבסיס, ולכן ניתן להשוות את המעריכים בלבד:

$$3x = 2 - 2x$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$7 \cdot 6^{-x} + 6^{-x} = 48$$

נשים לב שהביטוי 6^{-x} חוזר על עצמו פעמיים, ואין עוד חזקות עם מעריך משתנה. לכן נסמן $t = 6^{-x}$ ונקבל:

$$7t + t = 48$$

$$8t = 48$$

$$t = 6$$

נציב חזרה:

$$6^{-x} = 6$$

$$6^{-x} = 6^1$$

קיבלנו בשני האגפים בסיס זהה, לכן נוכל להשוות מעריכים:

$$-x = 1 \rightarrow x = -1$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

$$2^{x^3} \cdot 64^{\frac{x^2-x}{2}} = \sqrt{2}^{2x}$$

נרצה להעביר את כל הבסיסים לבסיס 2. בשלב זה כבר לא נציין את חוקי החזקות שאנו עובדים איתם, אלא נבצע את המעברים בצורה זורמת:

$$2^{x^3} \cdot (2^6)^{\frac{x^2-x}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x}$$

$$2^{x^3} \cdot 2^{3x^2-3x} = 2^x$$

$$2^{x^3+3x^2-3x} = 2^x$$

קיבלנו בסיס 2 זהה בשני האגפים, ולכן נשווה את המעריכים:

$$x^3 + 3x^2 - 3x = x$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$$

$$x(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$x(x+4)(x-1) = 0$$

$$x = -4, 0, 1$$

$$4^x \cdot 3^{2x-1} + 2 = 7 \cdot 2^x \cdot 3^{x-1}$$

$$(2^2)^x \cdot 3^{2x-1} + 2 = 7 \cdot 2^x \cdot 3^{x-1}$$

$$2^{2x} \cdot 3^{2x-1} + 2 = 7 \cdot 2^x \cdot 3^{x-1}$$

$$2^{2x} \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} + 2 = 7 \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 3^{-1}$$

$$(2 \cdot 3)^{2x} \cdot 3^{-1} + 2 = 7 \cdot (2 \cdot 3)^x \cdot 3^{-1}$$

$$6^{2x} \cdot 3^{-1} + 2 = 7 \cdot 6^x \cdot 3^{-1}$$

$$(6^x)^2 \cdot 3^{-1} - 7 \cdot 3^{-1} \cdot 6^x + 2 = 0$$

נציב $t = 6^x$:

$$\frac{1}{3}t^2 - \frac{7}{3}t + 2 = 0$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$(t-6)(t-1) = 0$$

$$t = 6, 1$$

נציב חזרה:

$$6^x = 6 \rightarrow 6^x = 6^1 \rightarrow x = 1$$

$$6^x = 1 \rightarrow 6^x = 6^0 \rightarrow x = 0$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

$$\sqrt[x-3]{16} = 64^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$2^{\frac{4}{x-3}} = 2^{12} \cdot 2^{-2x} = 2^{12-2x}$$

חשוב מאוד לא לשכוח תחום הגדרה!

$$x \neq 3$$

כעת אפשר להמשיך:

$$\frac{4}{x-3} = 12 - 2x$$

$$\frac{2}{x-3} = 6 - x$$

$$2 = (6-x)(x-3) = 6x - 18 - x^2 + 3x = -x^2 + 9x - 18$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$(x-5)(x-4) = 0$$

$$x = 5, 4$$

$$4^{x-1} + 2^{x-2} - 68 = 0$$

$$(2^{x-1})^2 + 2^{-1} \cdot 2^{x-1} - 68 = 0$$

$$t = 2^{x-1}, \text{ נציב,}$$

$$t^2 + \frac{1}{2}t - 68 = 0$$

$$t = 8, -8.5$$

ברגע שקיבלנו אחרי הצבה מעריכית עם בסיס חיובי $t < 0$, אפשר לפסול את הפתרון. מדוע? כיוון שמעריך הוא מספר החזרות על כפל הבסיס בעצמו. אם נכפול בסיס חיובי בעצמו מספר לא ידוע של פעמים, בוודאי שנקבל מספר חיובי. על כן פתרון חיובי לא אפשרי.

$$t = 8$$

נציב חזרה:

$$2^{x-1} = 8 = 2^3$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 4$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

אי שוויונים מעריכיים:

לפני שניכנס לפרק, נייחס חשיבות לאי שוויון מיוחד שכבר פגשנו:

$a^x > 0$ עבור $a > 0$. פתרון: כל x ממשי. כפי שהוסבר קודם לכן - אם נכפול x פעמים מספר חיובי בעצמו, בהכרח נקבל מספר חיובי, ללא תלות בערכו של x .

כעת נצלול לעובי הקורה. המטרה שלנו נשארה בעינה - להגיע למצב ששני האגפים מאותו הבסיס, ולאחר מכן נוכל לבטל את הבסיסים, ולבצע את ההשוואה הנדרשת על פי סימן ההשוואה ($\leq, \geq, <, >$).

כלומר, אם A, B הם ביטויים אלגבריים של x (לדוגמה, $\frac{x}{2} + 1, x^2 + 3, \dots$) נרצה להגיע לצורה:

$$k^A \square k^B$$

כאשר $\square$ יכול להיות כל אחד מהסימנים שדיברנו עליהם.

אם $k > 1$ בדוגמה שלנו, נשמור את הסימן בהשוואת המעריכים:

$$k^A > k^B \rightarrow A > B, \quad k^A \geq k^B \rightarrow A \geq B, \quad k^A < k^B \rightarrow A < B, \quad k^A \leq k^B \rightarrow A \leq B$$

אם $0 < k < 1$ בדוגמה שלנו, נהפוך את הסימן בהשוואת המעריכים:

$$k^A > k^B \rightarrow A < B, \quad k^A \geq k^B \rightarrow A \leq B, \quad k^A < k^B \rightarrow A > B, \quad k^A \leq k^B \rightarrow A \geq B$$

טיפ: תמיד אפשר להפוך בסיס $0 < k < 1$ לבסיס $k > 1$ על ידי העלאה בחזקת (-1). מדובר בפעולה מומלצת כדי לא לבצע שגיאות מיותרות בפתרון אי השוויונים.

דוגמאות:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} \cdot 27^{-x}$$

נפתור ב-2 דרכים:

1.

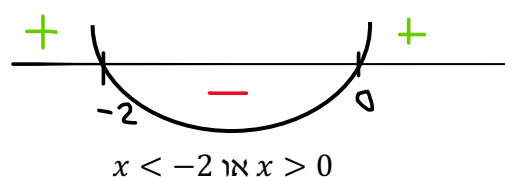
$$9^{-x} > 3^{-x^2-x} \cdot 3^{-3x}$$

$$3^{-2x} > 3^{-x^2-4x}$$

$$-2x > -x^2 - 4x$$

$$x^2 + 2x > 0$$

$$x(x+2) > 0$$



2.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} \cdot 27^{-x}$$

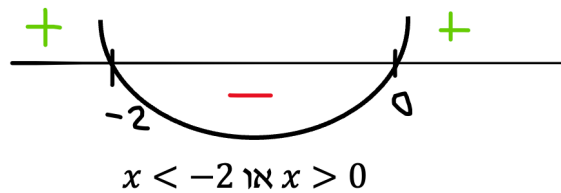
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x+3x}$$

$$2x < x^2 + 4x$$

$$x^2 + 2x > 0$$

$$x(x+2) > 0$$



דוגמאות לאי שוויונים נוספים:

$$4^{2x} > 3 \cdot 4^{x+1} - 32$$

$$(4^x)^2 > 3 \cdot 4 \cdot 4^x - 32$$

נסמן $t = 4^x$

$$t^2 > 12t - 32$$

$$t^2 - 12t + 32 > 0$$

$$(t-8)(t-4) > 0$$

$$t < 4 \text{ או } t > 8$$

שימו לב שלא סיימנו! יש להציב חזרה:

$$4^x < 4 \text{ או } 4^x > 8$$

$$x < 1 \text{ או } 2^{2x} > 2^3$$

$$x < 1 \text{ או } 2x > 3$$

$$x < 1 \text{ או } x > 1.5$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

נפתור אי שוויון מסכם ברמה גבוהה (מתוך תוכנית בר-אילן):

$$\frac{18}{9^{\sqrt[3]{x}} - 1} - \frac{5}{9^{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}}} \leq 4$$

שימו לב - מכיוון שיש לנו איברים חופשיים שלא ניתנים לביטוי כאיבר מעריכי עם הבסיס היסודי הנדרש כאן - 3, מדובר ברמז לשיטת ההצבה.

ראשית, נגדיר תחום הגדרה:

$$9^{\sqrt[3]{x}} - 1 \neq 0$$

$$9^{\sqrt[3]{x}} \neq 9^0$$

$$\sqrt[3]{x} \neq 0$$

$$x \neq 0$$

כעת ניתן לפתור.

$$\frac{18}{9^{\sqrt[3]{x}} - 1} - \frac{5}{9^{\sqrt[3]{x}} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}} \leq 4$$

נציב $t = 9^{\sqrt[3]{x}}$, כלומר, $t \neq 1$.

$$\frac{18}{t - 1} - \frac{5}{\frac{3}{2}} \leq 4$$

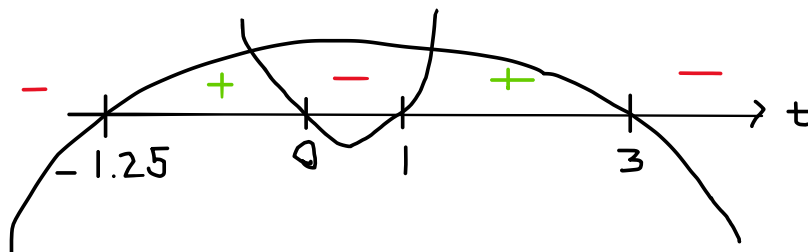
$$\frac{18}{t - 1} - \frac{15}{t} \leq 4$$

$$\frac{18t - 15(t - 1) - 4t(t - 1)}{t(t - 1)} \leq 0$$

$$\frac{18t - 15t + 15 - 4t^2 + 4t}{t(t - 1)} \leq 0$$

$$\frac{-4t^2 + 7t + 15}{t(t - 1)} \leq 0$$

מאפסים של המונה: $t = 3, -1.25$. מאפסים של המכנה: $t = 0, 1$. נציב על ציר המספרים:



$$t \leq -1.25 \text{ או } 0 < t < 1 \text{ או } t \geq 3$$

נציב חזרה:

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

$$9^{\sqrt[3]{x}} \leq -1.25$$

נשים לב שאי השוויון דורש שהביטוי המעריכי בעל הבסיס החיובי יהיה שלילי - מה שלא אפשרי. לכן למקרה זה אין פתרון.

$$0 < 9^{\sqrt[3]{x}} < 1$$

החלק השמאלי מובן מאלין, והחלק המעניין הוא הימני:

$$9^{\sqrt[3]{x}} < 1 \rightarrow 9^{\sqrt[3]{x}} < 9^0 \rightarrow \sqrt[3]{x} < 0 \rightarrow x < 0$$

$$9^{\sqrt[3]{x}} \geq 3 \rightarrow 3^{2\sqrt[3]{x}} \geq 3^1 \rightarrow 2\sqrt[3]{x} \geq 1 \rightarrow \sqrt[3]{x} \geq \frac{1}{2} \rightarrow x \geq \frac{1}{8}$$

וקיבלנו:

$$x < 0 \text{ או } x \geq \frac{1}{8}$$

הערה חשובה! באי שוויון מעריכי שלאחר הצבה/ביטול בסיסים מתקבל אי שוויון רציונלי (אי שוויון בין שברים אלגבריים הכוללים משתנה במכנה) אין לבטל את המכנה ע"י כפילת כל אי השוויון בו, שכן אין לנו ידיעה על השפעת פעולה זו על סימן על השוויון. על מנת לפתור ניתן להיעזר בשיטות שונות שנלמדו בכיתה י' - שיטת "הנחש"/"האינטרוולים" או שיטה גרפית כפי שהוצגה בפתרון.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

פתרון משוואות מעריכיות פשוטות ללא "פתרון יפה" בעזרת לוגריתם:

אומנם ראינו שאפשר לפתור משוואה מעריכית על ידי צמצום כל אגף לחזקה עם אותו הבסיס, אך לא תמיד הדבר אפשרי בצורה אינטואיטיבית. לדוגמה:

$$3^x = 12$$

שימו לב של- x אין פתרון שלם.

הדרך הפשוטה ביותר לפתור משוואות מהסוג הללו, $a^x = b$, כאשר לא ניתן לצמצם את a, b לחזקה עם בסיס משותף, היא שימוש בלוגריתם.

לוגריתם הוא אופרטור מתמטי המהווה פעולה הפוכה להעלאה בחזקה.

במקום לשאול "למה שווה a בחזקת b "? אנחנו שואלים "איזה x מתאים כך ש- $a^x = b$?"

הלוגריתם מחולק ל-2: בסיס הלוגריתם והערך שהוא מקבל:

$$\log$$

בסיס הלוגריתם בצורה אינטואיטיבית הוא גם בסיס החזקה במשוואה $a - a^x = b$. ערך הלוגריתם הוא האיבר החופשי הפשוט במשוואה - b . חישוב זה יחזיר לנו את x . כלומר:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$$

במחשבוני של היום ניתן ואפשר להשתמש בלוגריתם עם בסיס מותאם אישית.

למשל, נפתור את המשוואה:

$$3^x = 12 \rightarrow x = \log_3 12 \approx 2.262 \text{ מחשבון}$$

תכונות חשובות של לוגריתם שילוו אותנו (עבור $a, b > 0, a \neq 1$):

$$a^{\log_a(b)} = b, \log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b), \log_b(1) = 0$$

לוגריתם ללא בסיס חד משמעי מצוין כברירת מחדל הוא מבסיס 10.

קבוע אוילר והלוגריתם הטבעי ($\ln$):

קבוע אוילר הוא מספר קבוע אי-רציונלי מיוחד (על אותו המשקל כמו הקבוע π) שמסומן $e \approx 2.718$.

מכיוון שבכל זאת, קבוע זה הוא מספרי וחיובי, אפשר להגדיר ביטוי חזקה $e^a = b$, ולכן גם $\log_e b = a$.

מכיוון שנפוץ מאוד, נהוג לסמן את הלוגריתם הזה, המכונה "הלוגריתם הטבעי" כ- $\ln(b)$.

$$\ln(e) = 1, \ln(e^2) = 2, \ln(e^k) = k, \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1, \ln(1) = 0, \dots$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

הגדרה של פונקציה מעריכית:

הפונקציה $f(x) = a^x$ כאשר $a > 0$ ו- $a \neq 1$, היא פונקציה מעריכית.

תחום הגדרה: x יכול להיות כל מספר, בהנחה שאכן $a > 0$.

נקודות חיתוך עם הצירים:

$$a^x = 0 \rightarrow \text{אין פתרון}$$

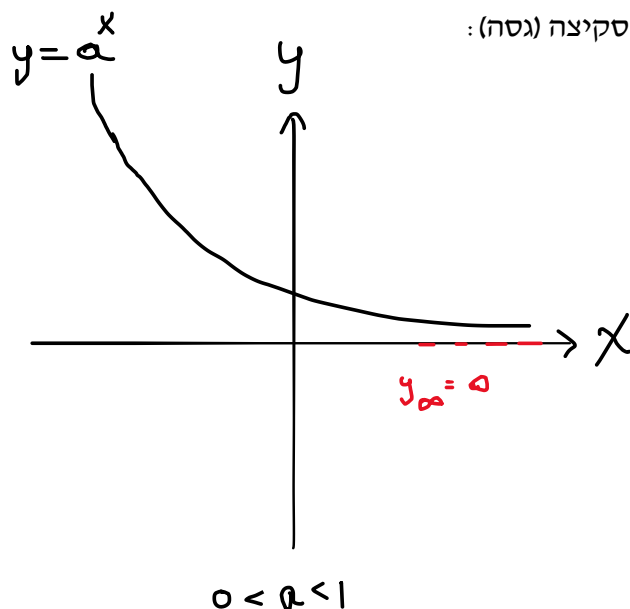
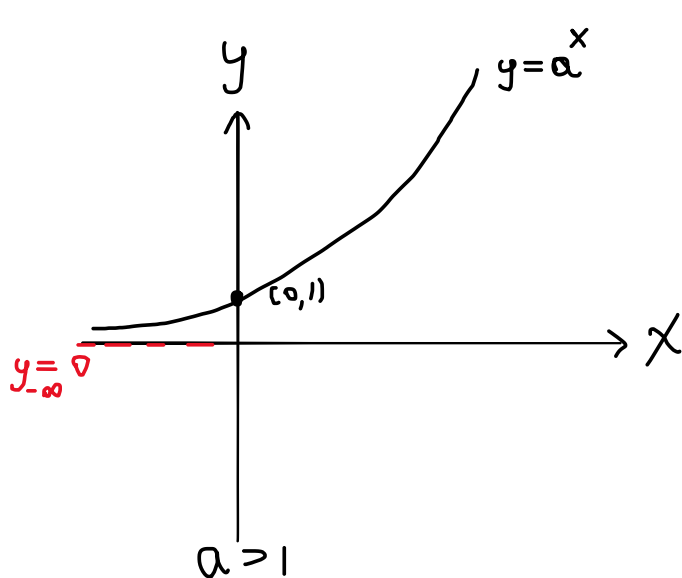
$$f(0) = a^0 = 1 \rightarrow (0,1)$$

תחומי חיוביות ושליליות: $a^x > 0$ בהנחה ש- $a > 0$, לכל x . לכן תחום השליליות הוא אף x .
שימו לב - קיבלנו נקודה **קבועה** לכל פונקציה מעריכית $f(x) = a^x$ בה $a > 0$ - הנקודה $(0,1)$.

מגמת עלייה/ירידה: שימו לב שאם $a > 1$, הפונקציה עולה כאשר x עולה. לדוגמה, $3^3 > 3^2 > 3^1$. לכן נאמר שאם $a > 1$ הפונקציה עולה. לעומת זאת, $0 < a < 1$, הפונקציה יורדת כאשר x עולה.

לדוגמה, $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^1$. לכן נאמר שאם $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת.

אסימפטוטות: מכיוון שאין נקודות אי-תחום הגדרה, אין חשש מאסימפטוטות אנכיות. יש לבדוק רק את התנהגות הפונקציה באינסוף מחשש לאסימפטוטות אופקיות. ראינו שאם $a > 1$ אז ככל ש- x עולה גם a^x עולה. לכן אם $x \rightarrow \infty$ גם $a^x \rightarrow \infty$ ואין אסימפטוטה אופקית באינסוף. לעומת זאת, ראינו ש- $a^x > 0$ לכל x , ולכן כאשר $x \rightarrow -\infty$, תתקבל אסימפטוטה אופקית $y = 0$ ב- $-\infty$. כאשר $0 < a < 1$ המצב הפוך פשוט.



סקיצה (גסה):

מניתוח התנהגות שתי הפונקציות עבור $a > 1$, $0 < a < 1$ מתקבל הקשר האנליטי ביניהן:

$$\text{אם } f(x) = a^x, g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x \text{ עבור } a > 1, \text{ על פי חוקי חזקות, } g(x) = (a^{-1})^x = a^{-x} = -f(x).$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

נבצע חקירה פשוטה, ללא גזירה, לפונקציה הבאה :

$$f(x) = \frac{2x}{9^x - 81}$$

תחום הגדרה :

$$9^x - 81 \neq 0 \rightarrow 9^x \neq 81 \rightarrow 9^x \neq 9^2 \rightarrow x \neq 2$$

אסימפטוטות אנכיות :

קיבלנו נקודה חשודה אחת $x = 2$. נציב ונקבל $f(2) = \frac{4}{0}$. מונה לא התאפס, מכנה כן התאפס, ולכן מדובר באסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטות אופקיות :

אם ננסה להציב $x = \infty$ בצורה ישירה בפונקציה נקבל $f(\infty) = \frac{2 \cdot \infty}{9^\infty - 81} = \frac{\infty}{\infty}$ הדרך שלנו לפתור מצבים כאלו היא פשוט להסתכל על הפונקציה ולהבין מי מושך יותר חזק - המונה או המכנה. ברור מאוד שלמכנה, שהוא ביטוי מעריכי, יש השפעה רבה יותר על הפונקציה מאשר המונה, שהוא ביטוי פולינומי. על כן, למדנו שכאשר המכנה משפיע יותר מהמונה, האסימפטוטה האופקית היא $y = 0$.

אם ננסה להציב $x = -\infty$ בצורה ישירה בפונקציה נקבל $f(-\infty) = \frac{2 \cdot (-\infty)}{9^{-\infty} - 81} = \frac{-\infty}{-81} = \infty$ ולכן אין אסימפטוטה אופקית במינוס אינסוף.

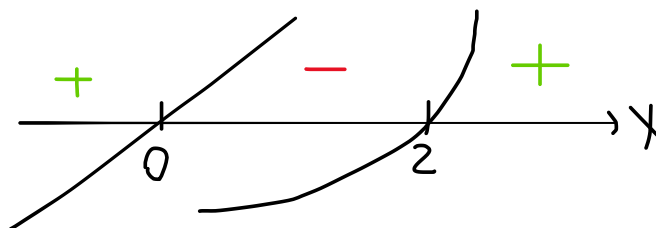
נקודות חיתוך עם הצירים :

$$\begin{aligned} \frac{2x}{9^x - 81} = 0 &\rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)_x \\ f(0) = \frac{2 \cdot 0}{9^0 - 81} = \frac{0}{-80} = 0 &\rightarrow (0,0)_y \end{aligned}$$

תחום חיוביות ושליליות :

$$\frac{2x}{9^x - 81} > 0$$

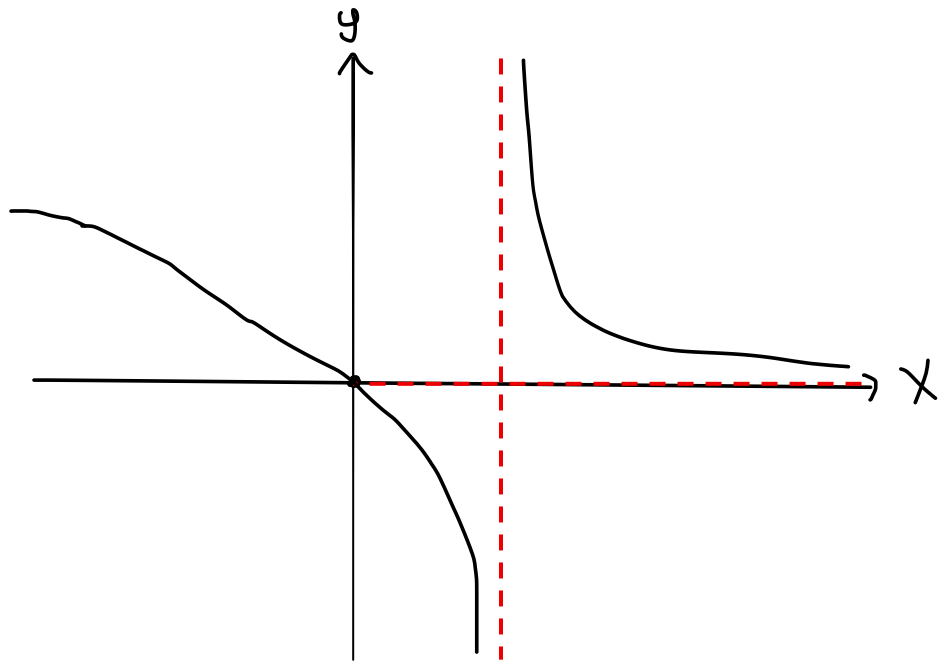
המאפסים - $x = 0, 2$. נציב בציר מספרים :



ולכן הפונקציה חיובית עבור $x > 2$ או $x < 0$ ושלילית עבור $0 < x < 2$.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

נשרטט סקיצה (גסה):



סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

חשבון דיפרנציאלי של פונקציה מעריכית:

כעת נלמד את נגזרתה של הפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$ עבור $a > 0, a \neq 1$:

$$f'(x) = a^x \ln(a)$$

שימו לב שתמיד יהיה שימוש בלוגריתם הטבעי, בבסיס e , ללא קשר למה הוא בסיס החזקה המקורי. לדוגמה,

$$f(x) = 4^x \rightarrow f'(x) = 4^x \ln(4)$$

אם יש לנו הרכבה של פונקציות: $f(x) = a^{g(x)}$, נכפול בנגזרת הפנימית, $g'(x)$. לדוגמה,

$$f(x) = 4^{x^2+3x+5} \rightarrow f'(x) = 4^{x^2+3x+5} \ln(4) (2x + 3)$$

שאלה מעניינת -

מה הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^x$?

$$f'(x) = e^x \ln(e)$$

אבל $\ln(e)$ שקול לשאלה " e בחזקת ? שווה ל- e ?" ידועה לנו התשובה - 1. אכן, $\ln(e) = 1$ ומתקיים:

$$f'(x) = e^x$$

קיבלנו תכונה מרתקת של הפונקציה e^x - היא שווה לנגזרתה **מכל סדר**. אם נגזור n פעמים את הפונקציה, עדיין נישאר עם e^x .

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

נראה דוגמה מהבגרות האחרונה שהייתה (מועד ב', 572, קיץ 2026):

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + 2$$

תחום הגדרה:

$$e^x - 1 \neq 0 \text{ וגם } e^x - 5 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 1 \text{ וגם } e^x \neq 5 \rightarrow x \neq \ln(1) \text{ וגם } x \neq \ln(5) \rightarrow x \neq 0, \ln(5)$$

(הערה: $\ln(5)$ הוא מספר אי-רציונלי ולכן נרצה להשאיר אותו כביטוי לוגריתמי בתשובה הסופית).

אסימפטוטות מאונכות לצירים:

$$f(x) = \frac{(e^x - 5 + 5(e^x - 1) + 2(e^x - 1)(e^x - 5))}{(e^x - 1)(e^x - 5)}$$

$$f(0) = \frac{-4}{0} \rightarrow x = 0 \text{ אסימפטוטה אנכית}$$

$$f(\ln(5)) = \frac{-20}{0} \rightarrow x = \ln(5) \text{ אסימפטוטה אנכית}$$

$$f(\infty) = \frac{1}{e^\infty - 1} + \frac{5}{e^\infty - 5} + 2 = \frac{1}{\infty} + \frac{5}{\infty} + 2 = 0 + 0 + 2 = 2 \rightarrow y_\infty = 2 \text{ אסימפטוטה אופקית}$$

$$f(-\infty) = \frac{1}{e^{-\infty} - 1} + \frac{5}{e^{-\infty} - 5} + 2 = \frac{1}{-1} + \frac{5}{-5} + 2 = -1 - 1 + 2 = 0 \rightarrow y_{-\infty} = 0 \text{ אסימפטוטה אופקית}$$

נקודות חיתוך עם הצירים:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x - 5 + 5e^x - 5 + 2((e^x)^2 - 5e^x - e^x + 5)}{(e^x - 1)(e^x - 5)} = \frac{6e^x - 10 + 2e^{2x} - 12e^x + 10}{(e^x - 1)(e^x - 5)} \\ &= \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5} \end{aligned}$$

נשווה לאפס:

$$\frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5} = 0 \rightarrow 2e^{2x} - 6e^x = 0 \rightarrow 2e^x(e^x - 3) = 0 \rightarrow e^x = 0 \text{ או } e^x - 3 = 0$$

למשוואה $e^x = 0$ אין פתרון ממשי, פתון המשוואה $e^x = 3$ הוא $x = \ln(3)$. לכן נקודת האפס היא $(\ln(3), 0)$.

אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y מכיוון ש-0 מחוץ לתחום הגדרתה של הפונקציה.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

כעת לרגע שחיכינו לו - נקודות הקיצון :

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (e^x - 1) - 1 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{0 \cdot (e^x - 5) - 5e^x}{(e^x - 5)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{5e^x}{(e^x - 5)^2}$$

$$= -e^x \left(\frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{5}{(e^x - 5)^2} \right)$$

בהשוואה לאפס נקבל:

$$e^x = 0 \text{ או } \frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{5}{(e^x - 5)^2} = 0$$

למשוואה השמאלית אין פתרון. נעשה מכנה משותף למשוואה הימנית:

$$(e^x - 5)^2 + 5(e^x - 1)^2 = 0$$

אם נרצה, ניתן להציב $t = e^x$:

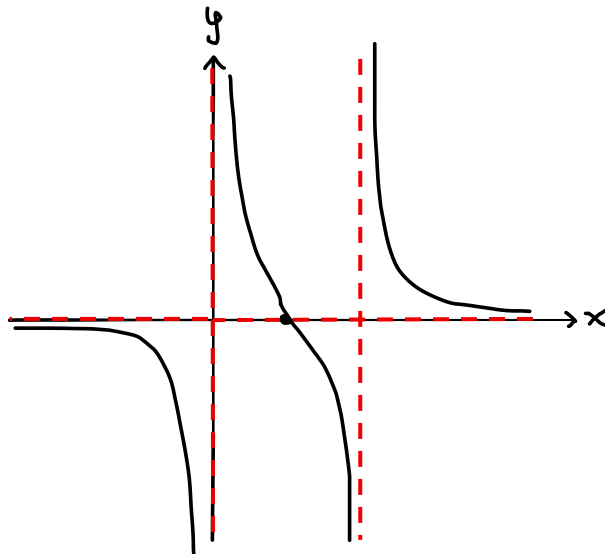
$$(t - 5)^2 + 5(t - 1)^2 = 0$$

$$t^2 - 10t + 25 + 5t^2 - 10t + 5 = 0$$

$$6t^2 - 20t + 30 = 0$$

וגם למשוואה זו אין פתרון - ולכן אין נקודות קיצון לפונקציה. נשים לב שלפי צורת הפונקציה - הנגזרת שלילית תמיד, ולכן הפונקציה תמיד יורדת.

נשרטט את הסקיצה:



סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

שאלות חשיבה - פונקציה מעריכית:

- בעיות משיקים.
- טרנספורמציות מקדם אנליזה:
- הזזה אנכית: $g(x) = f(x) + a$.
- הזזה אופקית: $g(x) = f(x + a)$.
- מתיחה אנכית: $g(x) = af(x)$ עבור $a > 1$.
- כיווץ אנכי: $g(x) = af(x)$ עבור $0 < a < 1$.
- מתיחה אופקית: $g(x) = f(ax)$ עבור $0 < a < 1$.
- כיווץ אופקי: $g(x) = f(ax)$ עבור $a > 1$.
- שיקוף כלפי ציר x : $g(x) = -f(x)$.
- שיקוף כלפי ציר y : $g(x) = f(-x)$.
- ערך מוחלט: $g(x) = |f(x)|$.
- העלאה בחזקה: $g(x) = (f(x))^n$.
- פונקציה הופכית: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- שורש: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
- זוגיות ואי זוגיות של פונקציה.
- אי שוויונים (תחומים מסוימים, לדוגמה, מצאו את התחום בו הפונקציה f עולה ו- g יורדת).
- מספר הפתרונות של משוואה לפי מספר נקודות חיתוך בסקיצה.
- חשבון אינטגרלי: חישוב שטחים, פונקציה צוברת שטח, סידור ביטויים אינטגרליים לפי סדרי גודל...

לפני שנגיע לתרגל שאלת חקירה שלמה, נעבור ונחזק את החשבון האינטגרלי בפונקציות מעריכיות.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות:

ראשית נזכור שהאינטגרל היא הפעולה ההפוכה לגזרת. מכאן עולה כלל אינטואיטיבי לפונקציה הידועה שדיברנו עליה, $f(x) = e^x$:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

אפשר להכליל:

$$\int a^x \ln(a) dx = a^x + C$$

נזכור את כלל ההרכבה שדיברנו עליו ונכליל לסוג נוסף של אינטגרל נפוץ בבגרות:

$$\int a^{g(x)} \ln(a) g'(x) dx = a^{g(x)} + C$$

מהכלל הפשוט:

$$\int a^x \ln(a) dx = a^x + C$$

אפשר להוציא את ה- $\ln(a)$ החוצה ולקבל נוסחה חדשה:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

כלל שימושי נוסף:

$$\int a^{mx+b} dx = \frac{a^{mx+b}}{m \ln(a)} + C$$

להלן נוסחאות האינטגרציה מדף הנוסחאות הנספח לבגרות:

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1, \text{ ממשי } t)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

אם $F(x)$ היא פונקצייה קדומה של הפונקצייה $f(x)$ אז: $\int f(mx+b) dx = \frac{1}{m} F(mx+b) + C \quad (m \neq 0)$

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

דוגמה מבגרות (פתרון בעמוד הבא)

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(3) בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- y של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים IV–I שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a = 3$ ואיזה מן הגרפים מתאר את

הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a = -3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a = 3$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ה.

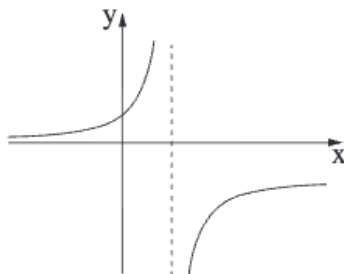
נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

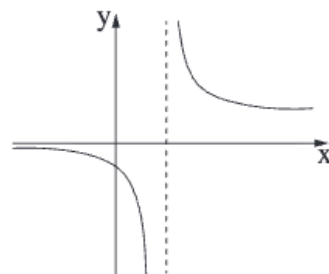
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

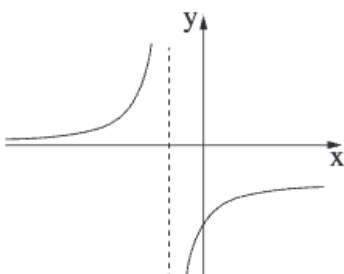
ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



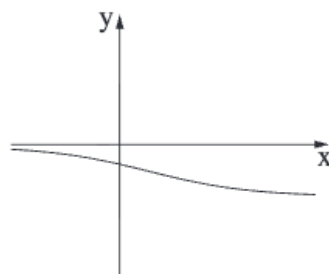
I



II



III



IV

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

פתרון:

א. (1)

$$a - e^x \neq 0 \rightarrow e^x \neq a$$

אם a שלילי, למשוואה אין פתרון, ותחום ההגדרה יהיה כל x . אם a חיובי, תחום ההגדרה יהיה $x \neq \ln(a)$.

(2). אפשר להמיר את הפונקציה לצורה שאנחנו מכירים מכיתה י"א - נציב $t = e^x$ ונקבל:

$$f(t) = \frac{t}{a - t}$$

נשים לב שכאשר $x \rightarrow \infty$, גם $t = e^x \rightarrow \infty$. כאשר $t \rightarrow \infty$ אנחנו יודעים מכיתה י"א שהאסימפטוטה האופקית מימין היא $y_\infty = -1$.

כאשר $x \rightarrow -\infty$ מתקיים $t = e^x \rightarrow 0$. כאשר $t \rightarrow 0$ מתקיים $f(0) = 0$ ולכן האסימפטוטה האופקית משמאל היא $y_{-\infty} = 0$.

(3). נגזור את הפונקציה. שימו לב לרמז "אם יש כאלה" - בדרך כלל זה מעיד על כך שאנחנו אמורים לקבל שהפונקציה עולה/יורדת בכל תחום הגדרתה.

$$f'(x) = \frac{e^x(a - e^x) - e^x \cdot (-e^x)}{(a - e^x)^2} = \frac{ae^x - e^{2x} + e^{2x}}{(a - e^x)^2} = \frac{ae^x}{(a - e^x)^2}$$

אם $a > 0$ מדובר במנת שני איברים חיוביים, ולכן הנגזרת תהיה לעד חיובית והפונקציה לעד עולה. כלומר, תחום העלייה כל x ותחום הירידה אף x .

אם $a < 0$ מדובר במנה של איבר שלילי עם חיובי, ולכן הנגזרת תהיה לעד שלילית, והפונקציה לעד יורדת. כלומר, תחום העלייה יהיה אף x ותחום הירידה כל x .

ב. עבור $a = 3$ לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x = \ln(3)$ והיא לעד עולה. לכן הגרף המתאים הוא גרף II.

עבור $a = -3$ לפונקציה אין אסימפטוטה אנכית והיא לעד יורדת. לכן הגרף המתאים הוא III.

ג. (1). תחום ההגדרה יהיה שילוב של 2 תנאים: תנאי ראשון הוא תנאי הקיום של $f(x)$, $x \neq \ln(3)$, והתנאי השני הוא אי התאפסות המכנה -

$$f(x) \neq -2 \rightarrow \frac{e^x}{3 - e^x} \neq -2 \rightarrow e^x \neq 2e^x - 6 \rightarrow e^x \neq 6 \rightarrow x \neq \ln(6)$$

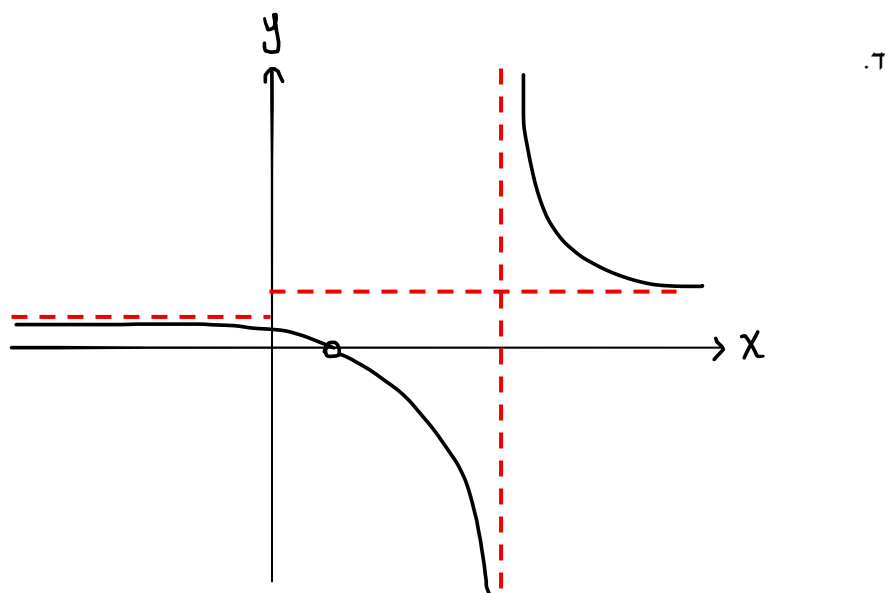
ותחום ההגדרה יהיה $x \neq \ln(6), \ln(3)$.

(2). ראשית מעלים את הפונקציה 2 יחידות מעלה. לכן האסימפטוטות האופקיות בשלב הביניים יהיו

$$y_\infty = 1, y_{-\infty} = 2. \text{ לאחר מכן הפיכת הפונקציה יוצרת אסימפטוטות אופקיות } y_\infty = 1, y_{-\infty} = \frac{1}{2}.$$

מכיוון ש- $x = \ln(3)$ הייתה אסימפטוטה אנכית, כעת היא חור, ו- $x = \ln(6)$ אסימפטוטה אנכית.

סיכום - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות



ה.

$\int_{-4}^{-2} g(x) dx$ הוא השטח שבין 2- ל-4- תחת הפונקציה $g(x)$, שמוכל בתוך שטח המלבן שנוצר ע"י האסימפטוטה האופקית. נחשב שטח זה: $0.5 \cdot 2 = 1$. לכן $\int_{-4}^{-2} g(x) dx < 1$.

שטח המלבן הנוצר תחת האסימפטוטה האופקית באינסוף מוכל בתוך השטח $\int_2^3 g(x) dx$. נחשב שטח זה: $1 \cdot 1 = 1$. לכן, $\int_2^3 g(x) dx > 1$. מכאן כי $\int_2^3 g(x) dx > 1 > \int_{-4}^2 g(x) dx$, כלומר, הטענה שגויה, כי $\int_{-4}^2 g(x) dx < \int_2^3 g(x) dx$.

תזכורת - שאלת החקירה הזו, במידה ותבחרו בה, שווה 33.33 נקודות מציון הבגרות הסופי! שימו לב שרוב השאלה זהה לחקירות שעשינו בשנה שעברה, ולכן מומלץ לבחור לפחות חקירה אחת בבגרות 572.