

סיכום - גיאומטריה אנליטית

הנקודה והישר:

ייצוג של נקודה במישור:

המישור שלנו, מערכת הצירים הדו ממדית (ציר x וציר y), יכול להכיל אינסוף נקודות פוטנציאליות. כל נקודה מיוצגת על ידי שיעור x ושיעור y , בצורה (x, y) .

לדוגמה, $A(2,3)$ היא נקודה שנמצאת בשיעור ה- x 2 ובשיעור ה- y 3.

מערכת הצירים שלנו מחולקת ל-4 רביעים:

הרביע הראשון, צד ימין למעלה של המערכת. מייצג את כל הנקודות במישור ששיעור ה- x ושיעור ה- y שלהן חיוביים.

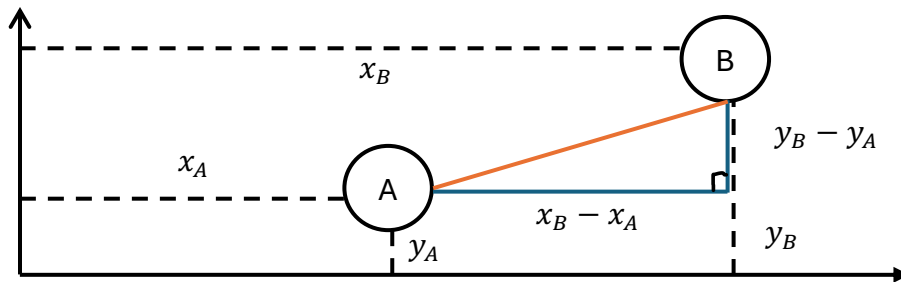
הרביע השני, צד שמאל למעלה של המערכת. מייצג את כל הנקודות במישור ששיעור ה- x שלהן שלילי ושיעור ה- y שלהן חיובי.

הרביע השלישי, צד שמאל למטה של המערכת. מייצג את כל הנקודות במישור ששיעור ה- x שלהן ושיעור ה- y שלהן שליליים.

הרביע הרביעי, צד ימין למטה של המערכת. מייצג את כל הנקודות במישור ששיעור ה- x שלהן חיובי ושיעור ה- y שלהן שלילי.

נוסחת מרחק בין שתי נקודות במישור:

תהיינה הנקודות $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ נקודות במישור (במערכת הצירים שלנו). המרחק האוקלידי, המרחק הישיר הקטן ביותר, בין A לבין B , מתקבל כתוצאה משימוש במשפט פיתגורס:



מהשרטוט ומחישוב האורכים נקבל משולש ישר זווית, כאשר ניצב אחד הוא הפרש ה- x ים וניצב שני הוא הפרש ה- y ים. לפי פיתגורס:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

והנוסחה שהתקבלה:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

סיכום - גיאומטריה אנליטית

לדוגמה, המרחק בין הנקודה $(2,8)$ לנקודה $(-3,7)$ יהיה:

$$d((2,8), (-3,7)) = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (8 - 7)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

בהמשך נראה שאלות שמשלבות את נוסחת המרחק, המכונה גם בצורה לא פורמלית, נוסחת "דיסטנס", עם נוסחאות ומיקומים גיאומטריים נוספים.

נוסחת הישר:

ישר הוא אוסף של נקודות במערכת צירים אשר מקיימות משוואה ממעלה ראשונה בין y לבין x . לדוגמה, כל הנקודות שערך ה- y שלהן גדול פי 2 מערך ה- x שלהן.

כל ישר מורכב מ-2 פרמטרים:

שיפוע הישר: נטיית הישר. עד כמה משמעותי השינוי בערכי ה- y כאשר נעים בין ערכי x שונים?

האיבר החופשי: הזזה אנכית כלפי מעלה או מטה של הישר. מהווה גם את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם הציר האנכי (ציר ה- y).

בגיאומטריה האנליטית נכיר שלוש נוסחאות עבודה עם ישר:

- $y = mx + b$: הנוסחה הפשוטה ביותר. m הוא השיפוע ו- b הוא האיבר החופשי.

- $(y - y_1) = m(x - x_1)$: נוסחת ישר נוחה להצבה בהינתן נקודה (x_1, y_1) על הישר. m הוא השיפוע ו- $mx_1 - y_1$ הוא האיבר החופשי.

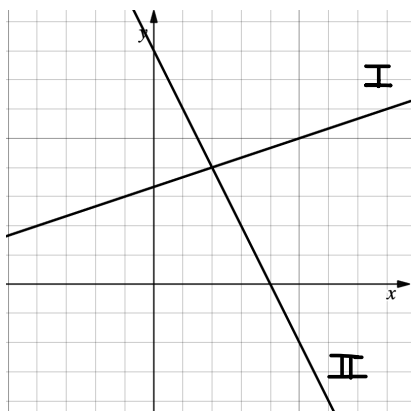
- $Ax + By + C = 0$: נוסחה נוחה לחלק מהנוסחאות שנכיר בהמשך. $-\frac{A}{B}$ הוא השיפוע, ו- $-\frac{C}{B}$ הוא האיבר החופשי.

לא תמיד יהיה לנו נתון בתרגיל מסוים השיפוע, אלא לעיתים נקבל או נגיע למצב שיש לנו שתי נקודות מלאות ידועות על הישר: $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. במקרה כזה, השיפוע יהיה השינוי היחסי בערכי ה- y : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

תכונות של שיפוע:

1. שיפוע חיובי משמעותו שהישר במגמת עלייה (משמאל לימין).
2. שיפוע שלילי משמעותו שהישר במגמת ירידה (משמאל לימין).
3. שיפוע 0 משמעותו שהישר הוא קבוע, לא עולה ולא יורד, אלא תמיד מחזיר את אותו ה- y לכל x .
4. מהביטים גיאומטריים וטריגונומטריים, בהינתן הזווית שיוצר ישר מסוים עם ציר ה- x החיובי (θ) , השיפוע של הישר, m , מקיים: $\tan(\theta) = m$.

סיכום - גיאומטריה אנליטית



תרגיל לדוגמה :

נתונים שני הישרים $x - 3y + 10 = 0$, $y = -2x + 8$.

א. התאימו לכל ישר בגרף את משוואתו.

ב. מצאו את הזווית שיוצר כל ישר עם חלקו החיובי של ציר ה- x .

ג. האם קיימת נקודה A על הישר העולה ונקודה B עם שיעור $y = 4$ על הישר היורד כך שהמרחק ביניהן יהיה 3 יח'?

פתרון :

א. נשים לב שישר I עולה וישר II יורד. נוכל לפי השיפועים להתאים משוואה לישר :

$m_{y=-2x+8} = -2$. השיפוע שלילי, ולכן הפונקציה הזו יורדת, ומתאימה ל- II .

$m_{x-3y+10} = \frac{1}{3}$. השיפוע חיובי, ולכן הפונקציה הזו עולה, ומתאימה ל- I .

ב. מצאנו את השיפועים, וכעת ניתן להיעזר בכלל הטנגנס :

$$\tan(\theta_1) = -2 \rightarrow \tan^{-1}(-2) \quad \theta_1 = -63.43^\circ + 180^\circ k \rightarrow \theta_1 = 113.57^\circ$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{1}{3} \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \quad \theta_2 = 18.435^\circ \rightarrow \theta_2 = 18.435^\circ$$

ג. ראשית נשים לב שאם יש לנו שיעור y של הנקודה B ואנחנו יודעים שהיא על הישר II , נוכל לחלץ את ערך ה- x המתאים לה ולחשוף את הנקודה : $-2x + 8 = 4 \rightarrow -2x = -4 \rightarrow x = 2$. כלומר, $B(2,4)$.

כעת נשים לב שאפשר לסמן את שיעור ה- x של הנקודה A כ- a , ומתוך הישר עליו נמצא A ,

מתקבל $y = \frac{1}{3}a + \frac{10}{3}$. מכאן כי $A\left(a, \frac{1}{3}a + \frac{10}{3}\right)$. צמצמנו את הבעיה למשתנה אחד.

נשתמש בנוסחת מרחק בין שתי נקודות :

$$d(A, B) = \sqrt{(a-2)^2 + \left(\frac{1}{3}a + \frac{10}{3} - 4\right)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 4 + \frac{1}{9}(a-2)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}(a-2)^2}$$

נשווה ביטוי זה ל-3, כלומר ל-9 אחרי העלאה בריבוע :

$$\frac{10}{9}(a-2)^2 = 9 \rightarrow (a-2)^2 = \frac{81}{10} \rightarrow a-2 = \pm \frac{9}{\sqrt{10}} \rightarrow a_{1,2} = 2 \pm \frac{9}{\sqrt{10}}$$

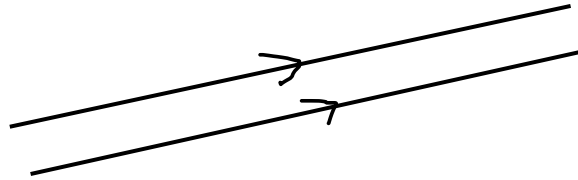
ולכן קיימות 2 נקודות A כנדרש, ונקודה B אפשרית אחת הזהה לשתייהן.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

בין ישרים יכולים להיות מצבים הדדיים שונים:

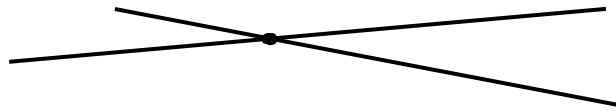
א. ישרים מקבילים:

ישרים מקבילים הם ישרים שאין להם נקודת חיתוך משותפת, אשר מתקבלים כתוצאה משוויון שיפועים.



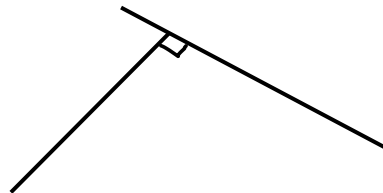
ב. ישרים חותכים:

ישרים חותכים הם ישרים שיש להם נקודת חיתוך משותפת. הדרך למציאת שיעורי נקודת החיתוך שלהן היא השוואה בין הישרים לקבלת שיעור ה- x , והצבתו באחד הישרים לקבלת שיעור ה- y .



ג. ישרים מאונכים:

ישרים מאונכים הם ישרים שיוצרים ביניהם זווית של 90° . זוג ישרים הם מאונכים אם ורק אם מכפלת השיפועים שלהן היא -1 .



ד. ישרים מתלכדים:

ישרים מתלכדים הם זוג ישרים שלהם אוסף זהה של נקודות. (כלומר, מדובר בישר אחד בעצם). זוג ישרים הם מתלכדים אם ורק אם הם בעל שיפוע זהה ואיבר חופשי זהה.

הערה - קיים מקרה מיוחד של ישר: ישר המקביל לציר ה- y . ישר המקביל לציר ה- x אינו נחשב לפונקציה, אלא למבנה גיאומטרי נטוי, והוא מהצורה $x = b$, והוא בעצם אוסף כל הנקודות ששיעור ה- x שלהן הוא b .

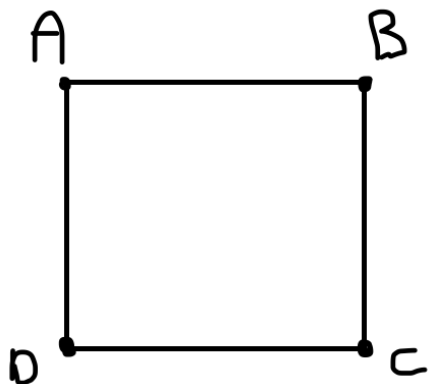


סיכום - גיאומטריה אנליטית

שאלה לדוגמה :

מצאו את שני הקודקודים החסרים בריבוע $ABCD$ אם ידוע: $A(0,0), B(4,3)$. (הבחינו בין המקרים).

פתרון -



ראשית נמצא את משוואת הישר AB :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4} (x - 0)$$

$$AB: y = \frac{3}{4}x$$

בריבוע כל הצלעות שוות ומאונכות, ולכן $AD \perp AB \perp BC$, ומכאן כי :

$$m_{AD} = m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

מתקבלים ישרים מהצורה :

$$AD: y - y_A = -\frac{4}{3}(x - x_A), \quad BC: y - y_B = -\frac{4}{3}(x - x_B)$$

$$AD: y = -\frac{4}{3}x, \quad BC: y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

$$AD: y = -\frac{4}{3}x, \quad BC: y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

מכאן כי הנקודה C והנקודה D בהתאמה הן $C(x_C, -\frac{4}{3}x_C + \frac{25}{3})$, $D(x_D, -\frac{4}{3}x_D)$,

כאמור, בריבוע כל הצלעות שוות. בפרט, $AB = AD = BC$:

$$AB = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

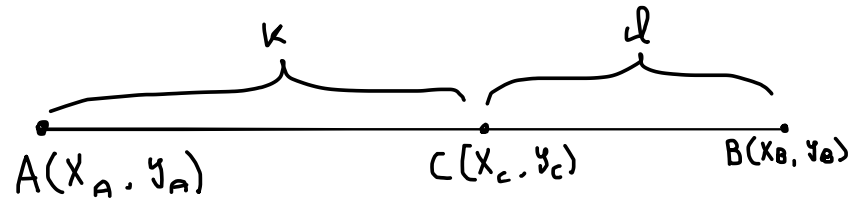
$$AD = d(A, D) = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(x_D - 0)^2 + \left(-\frac{4}{3}x_D - 0\right)^2} = \sqrt{x_D^2 + \frac{16}{9}x_D^2} = \sqrt{\frac{25}{9}x_D^2} = \pm \frac{5}{3}x_D = AD = AB = 5 \rightarrow \frac{x_D}{3} = \pm 1 \rightarrow x_D = \pm 3 \rightarrow D_1(3, -4), D_2(-3, 4)$$

$$\begin{aligned} BC &= d(B, C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(x_C - 4)^2 + \left(-\frac{4}{3}x_C + \frac{25}{3} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{x_C^2 - 8x_C + 16 + \frac{16}{9}x_C^2 - \frac{128}{9}x_C + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}x_C^2 - \frac{200}{9}x_C + \frac{400}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}(x_C - 4)^2} \\ &= \pm \frac{5}{3}(x_C - 4) = BC = AB = 5 \rightarrow \pm \frac{1}{3}(x_C - 4) = 1 \rightarrow x_C - 4 = \pm 3 \rightarrow x_C = 7, 1 \\ &\rightarrow C_1(7, -1), C_2(1, 7) \end{aligned}$$

סיכום - גיאומטריה אנליטית

חלוקת קטע ביחס נתון:

כאשר נתון הישר AB ועליו נקודה C המחלקת אותו ביחס מסוים, נוכל לקשר בין שיעורי הנקודה C לשיעורי הנקודות A, B :



$$x_C = \frac{x_A \cdot l + x_B \cdot k}{k + l}$$

$$y_C = \frac{y_A \cdot l + y_B \cdot k}{k + l}$$

נשים לב שאם C היא נקודת אמצע הקטע, כלומר, יחס החלוקה הוא 1:1, מתקבלת נוסחה:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$$

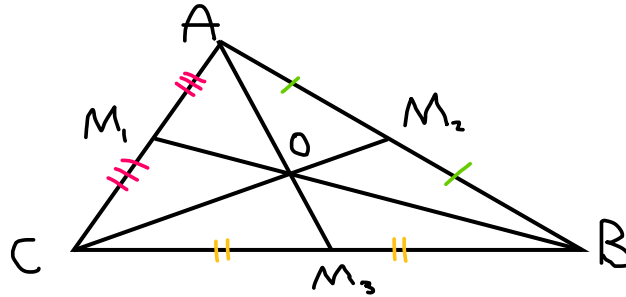
$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

שימו לב שמהנוסחאות בהינתן נתונים שונים אפשר למצוא את A, B, C, k, l .

סיכום - גיאומטריה אנליטית

לדוגמה,

הוכיחו שבמשולש בו הקודקודים $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ נקודת מפגש התיכונים היא $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.



נמצא את הנקודה M_1 , אמצע הקטע AC :

$$M_1\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

הנקודה O היא מפגש התיכונים, ומשפט גיאומטרי ידוע מלימודי שנים קודמות אומר כי מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 לטובת החלק ממנו יוצא התיכון. כלומר, $M_1O:BO = 1:2$. נשתמש בנוסחה של חלוקה ביחס נתון ונקבל:

$$O\left(\frac{\frac{x_A + x_C}{2} \cdot 2 + x_B}{3}, \frac{\frac{y_A + y_C}{2} \cdot 2 + y_B}{3}\right) = O\left(\frac{x_A + x_C + x_B}{3}, \frac{y_A + y_C + y_B}{3}\right)$$

מ.ש.ל.

הערה: מדובר במשפט לגיטימי גם בבגרות - שיעור ה- x של נקודת מפגש התיכונים של משולש הוא ממוצע שיעורי ה- x של קודקודי המשולש, ושיעור ה- y שלה הוא ממוצע שיעורי ה- y של קודקודי המשולש.

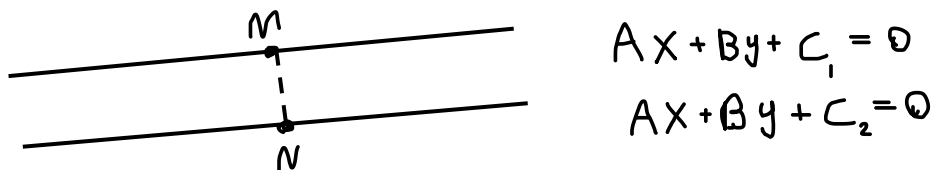
סיכום - גיאומטריה אנליטית

נוסחת מרחק בין שני ישרים מקבילים:

לעיתים נרצה לדעת מה המרחק בין ישר A לישר B , זוג ישרים מקבילים. למשל, אם נתונות לנו זוג משוואות ישר המייצגות זוג צלעות מקבילות שוות במלבן, המרחק ביניהם יהיה אורך הצלעות הנותרות במלבן.

כמובן שמרחק הוא מונח מאוד כללי - יש אינסוף דרכים להגיע מישר A לישר B , ובכל אחת מרחק שונה. מה שמעניין אותנו הוא המרחק הישר והקצר ביותר (אלכסון הוא אסון). כלומר, אנחנו נרצה להוריד אנך בין שני הישרים, שיהיה מאונך לשניהם, ולחשב את אורכו.

נפתח את נוסחת המרחק בין שני ישרים מקבילים בשיטה זו:



נקודה M נמצאת על הישר $Ax + By + C_1 = 0$ ולכן $M(x_M, -\frac{A}{B}x_M - \frac{C_1}{B})$. על בסיס נימוק זה, $N(x_N, -\frac{A}{B}x_N - \frac{C_2}{B})$

אורך האנך הוא המרחק בין M ל- N :

$$\begin{aligned} d(M, N) &= \sqrt{(x_M - x_N)^2 + \left(-\frac{A}{B}x_M - \frac{C_1}{B} + \frac{A}{B}x_N + \frac{C_2}{B}\right)^2} \\ &= \sqrt{(x_M - x_N)^2 + \left(\frac{-Ax_M - C_1 + Ax_N + C_2}{B}\right)^2} \end{aligned}$$

נשים לב שמכיוון ש- MN מאונך לשני הישרים ששיפועם $-\frac{A}{B}$, שיפוע האנך הוא $\frac{B}{A}$. על פי נוסחת השיפוע:

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{B}{A} \rightarrow x_M - x_N = \frac{A}{B}(y_M - y_N)$$

ומכיוון שהתקבל $y_M - y_N = \frac{-Ax_M - C_1 + Ax_N + C_2}{B}$ בשורש:

$$\begin{aligned} x_M - x_N &= \frac{-A^2x_M - AC_1 + A^2x_N + AC_2}{B^2} \rightarrow B^2(x_M - x_N) = -A^2(x_M - x_N) + A(C_2 - C_1) \\ &\rightarrow (A^2 + B^2)(x_M - x_N) = A(C_2 - C_1) \rightarrow x_M - x_N = \frac{A(C_2 - C_1)}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

ובהתאם:

$$y_M - y_N = \frac{B}{A}(x_M - x_N) = \frac{B(C_2 - C_1)}{A^2 + B^2}$$

נציב חזרה בשורש:

סיכום - גיאומטריה אנליטית

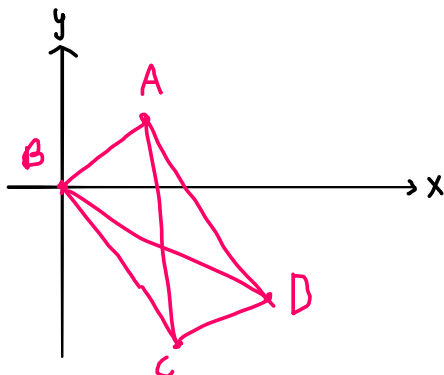
$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{A(C_2 - C_1)}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{B(C_2 - C_1)}{A^2 + B^2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{A^2(C_2 - C_1)^2 + B^2(C_2 - C_1)^2}{(A^2 + B^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(C_2 - C_1)^2(A^2 + B^2)}{(A^2 + B^2)^2}} = \sqrt{\frac{(C_2 - C_1)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\end{aligned}$$

וקיבלנו שהמרחק בין שני ישרים מקבילים $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$ הוא $\frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

תרגיל לדוגמה:

נתון המלבן $ABCD$. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x + y = 0$ ו- $CD: 3x + y - 6 = 0$. הקודקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC . מצאו את שטח המלבן, ואת נקודת מפגש אלכסונו, אם ידוע שהיא ברביע הרביעי.

פתרון - נשרטט סקיצה גסה מאוד:



אורך הצלע BC הוא המרחק בין הישרים AB ו- CD הנתונים:

$$BC = \frac{|-6 - 0|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

ולכן לפי הנתונים, $AB = \frac{24}{\sqrt{10}}$. מכאן כי שטח המלבן יהיה ≈ 14.4 . $S_{ABCD} = AB \cdot BC = \frac{24}{\sqrt{10}} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{144}{10} \approx 14.4$

מכיוון שמדובר במלבן, $BC \perp CD$, ולכן השיפוע של BC הוא $\frac{1}{3}$. מכיוון שמדובר בישר שעובר בראשית

הצירים, נקבל $y = \frac{1}{3}x$. הנקודה C היא מפגש הישרים BC, CD :

$$\frac{1}{3}x_C = -3x_C + 6 \rightarrow \frac{10}{3}x_C = 6 \rightarrow x_C = 1.8 \rightarrow C(1.8, 0.6)$$

הנקודה A מהצורה $A(x_A, -3x_A)$, המרחק AC לפי פיתגורס הוא $\sqrt{AB^2 + BC^2} = 7.82$. נציב בנוסחת מרחק:

סיכום - גיאומטריה אנליטית

$$d(A, C)^2 = \frac{306}{5} \rightarrow (x_A - 1.8)^2 + (-3x_A - 0.6)^2 = \frac{306}{5} \rightarrow x_A = \pm 2.4 \\ \rightarrow A_1(2.4 - 7.2), A_2(-2.4, 7.2)$$

O הוא אמצע הקטע AC :

$$O_1\left(\frac{2.4 + 1.8}{2}, \frac{-7.2 + 0.6}{2}\right) = O(2.1, -3.3)$$

נקודה ברביע הרביעי, כנדרש.

אם נציב את הנקודה A_2 נקבל ש- O לא ברביע הרביעי, ולכן פתרון זה נפסל.

נוסחת מרחק בין נקודה לישר :

כדי לסיים את פרק הנקודה והישר, נגדיר את המרחק בין נקודה $P(x_0, y_0)$ לבין הישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

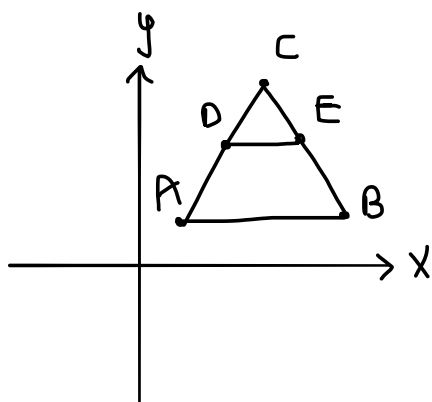
את הנוסחה הזו לא נוכיח, שכן ההוכחה דומה מאוד להוכחת נוסחת המרחק בין שני ישרים מקבילים.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

דוגמה :

במשולש $\triangle ABC$ נתון : $B(12,3)$ ו- $C(9,12)$. הנקודות D ו- E נמצאות בהתאמה על הצלעות AC ו- BC כך שהקטע DE מקביל לצלע AB . שטח המשולש $\triangle CDE$ הוא 4.5 יח"ר. שטח הטרפז $ABED$ הוא 36 יח"ר. א. מצאו את שיעורי הנקודה E . ב. הקודקוד A נמצא על הישר $y = -x + 6$, ושיעור ה- x שלו קטן מ-5. מצאו את שיעוריו.

פתרון :



$$S_{ABC} = 40.5 \text{ או } S_{CDE} = 4.5, S_{ABED} = 36$$

מכיוון ש- $DE \parallel AB$, ולכן $\angle CDE = \angle CAB$, $\angle CED = \angle CBA$, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון ולכן :

$$\frac{EC}{BC} = \sqrt{\frac{S_{DEC}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{4.5}{40.5}} = \frac{1}{3}$$

ולכן $CE : BC = 1 : 2$. מתוך נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון ניתן למצוא את הנקודה E :

$$E\left(\frac{x_C \cdot 2 + x_B}{3}, \frac{y_C \cdot 2 + y_B}{3}\right) = E(10, 9)$$

ב. אם הקודקוד A על הישר $y = -x + 6$ הוא מהצורה $A(x_A, -x_A + 6)$ עבור $x_A < 5$. נמצא את נוסחת הישר BC :

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B) \rightarrow y - 3 = \frac{9}{-3}(x - 12) \rightarrow BC: y = -3x + 39$$

שטח המשולש ABC הוא 40.5 יח"ר. אם נסמן את המרחק מהנקודה A לישר BC כ- d , לפי נוסחת שטח

$$d \cdot BC = 81, \text{ כלומר } \frac{d \cdot BC}{2} = 40.5$$

$$d(A, 3x + y - 39 = 0) = \frac{|3x_A - x_A + 6 - 39|}{\sqrt{(-3)^2 + 39^2}} = \frac{|2x_A - 33|}{\sqrt{10}}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(12 - 9)^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

ולכן

$$3 \cdot |2x_A - 33| = 81 \rightarrow |2x_A - 33| = 27 \rightarrow 2x_A - 33 = \pm 27 \rightarrow x_A = \begin{cases} 30 \\ 3 \end{cases} \xrightarrow{x_A < 5} x_A = 3$$

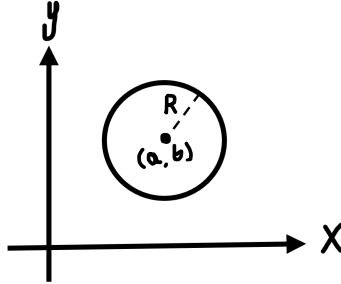
ולכן $A(3, 3)$.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

המעגל:

הגדרת המעגל ומצבים הדדיים:

המעגל הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה שנקראת מרכז המעגל:



הנוסחה המפורשת למעגל היא:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

כאשר (a, b) מרכז המעגל ורדיוסו R .

מעגל שמרכזו בראשית הצירים נקרא גם מעגל קנוני, והוא מהצורה: $x^2 + y^2 = R^2$. משוואה זו נקראת כאמור, המשוואה הקנונית של המעגל.

בין נקודה למעגל יש כמה סוגים של מצבים הדדיים:

- נקודה מחוץ למעגל: הנקודה (k, m) נמצאת מחוץ למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ אם ורק אם מתקיים: $(k - a)^2 + (m - b)^2 > R^2$.
- נקודה על המעגל: הנקודה (k, m) נמצאת על המעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ אם ורק אם מתקיים: $(k - a)^2 + (m - b)^2 = R^2$.
- נקודה בתוך המעגל: הנקודה (k, m) נמצאת על המעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ אם ורק אם מתקיים: $(k - a)^2 + (m - b)^2 < R^2$.

בין ישר למעגל יש גם סוגים שונים של מצבים הדדיים:

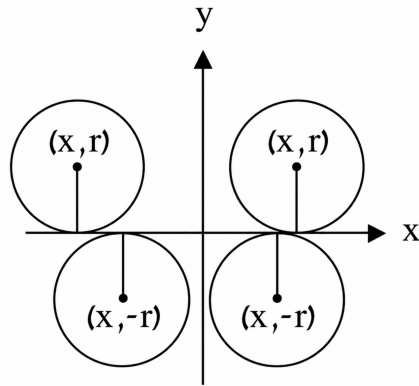
- ישר משיק למעגל: ישר ולו נקודת חיתוך אחת בלבד עם המעגל.
- ישר שחותך מעגל: ישר ולו 2 נקודות חיתוך עם המעגל.
- ישר שזר למעגל: ישר ולו אין נקודות חיתוך עם המעגל.

חשוב לזכור - כל משפטי המעגל ובפרט משפטי המשיק למעגל שלמדנו בגיאומטריה בשנים הקודמות רלוונטיים מאוד לפרק זה.

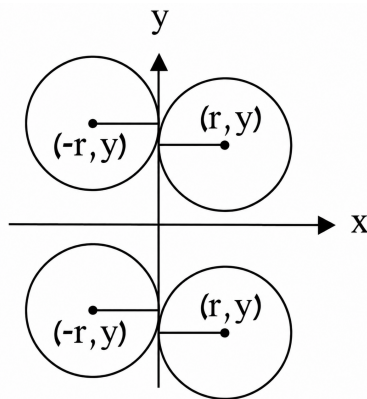
סיכום - גיאומטריה אנליטית

כמו כן, המעגל גם יכול להשיק לאחד או יותר מהצירים:

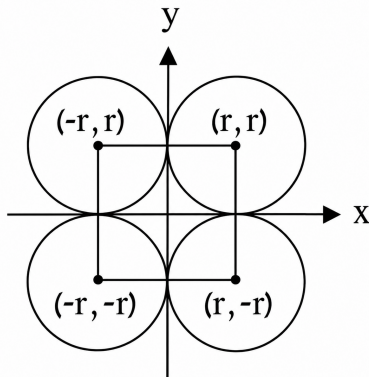
- אם המעגל משיק לציר ה- x בלבד, מרכזו יהיה מהסוג $(x, \pm r)$ כאשר r רדיוס המעגל, והסימן נקבע לפי הרביע שבו נמצא המעגל:



- אם המעגל משיק לציר ה- y בלבד, מרכזו יהיה מהצורה $(\pm r, y)$ כאשר r רדיוס המעגל, והסימן נקבע לפי הרביע שבו נמצא המעגל:



- אם המעגל משיק לשני הצירים, מרכזו יהיה מהצורה $(\pm r, \pm r)$ כאשר r רדיוס המעגל, והסימן נקבע לפי הרביע שבו נמצא המעגל:



סיכום - גיאומטריה אנליטית

משוואה מפורשת ומשוואה כללית:

המשוואה המפורשת של המעגל, אשר מעניקה לנו מידע גיאומטרי אודותיו: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, לרוב תשמש אותנו. אולם, לעיתים נרצה לעבוד עם המשוואה הכללית למעגל, שמתקבלת מפתחת הסוגריים בנוסחה המפורשת:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$

לעיתים נקבל או נגיע לנוסחת מעגל כדוגמת זו. במקרה כזה, נרצה להגיע לנוסחה המפורשת על ידי השלמה לריבוע.

לדוגמה, נמצא את המשוואה המפורשת של המעגל $x^2 - 8x + y^2 + 2y = 19$.

ברור לנו שמתקיים לפי הנוסחה הכללית $2ax = 8x \rightarrow a = 4$, כלומר אמור להתקבל ביטוי מהצורה $(x - 4)^2$. אולם, ביטוי כזה מוסיף איבר 16 למשוואה, שאינו נמצא במקור. לכן פשוט נחסר אותו מחוץ לסוגריים:

$$(x - 4)^2 - 16 + y^2 + 2y = 19 \rightarrow (x - 4)^2 + y^2 + 2y = 35$$

שימו לב שאנחנו מתקרבים למשוואה המפורשת. כעת נחזור על התהליך עבור y . מהמשוואה הכללית אנחנו מקבלים ש- $-2by = 2y \rightarrow b = -1$, כך שהביטוי אמור להיות $(y + 1)^2$ מה שישאיר שארית מיותרת של 1, אותה נחסר:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 35$$

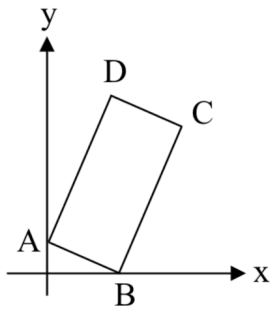
$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 6^2$$

וקיבלנו נוסחה בצורת המשוואה המפורשת. אם נפתח סוגריים ונעביר מאגף ימין לאגף שמאל 17, נקבל את המשוואה הכללית שהייתה נתונה לנו.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

תרגיל דוגמה :



במלבן ABCD הקודקודים A (0, 2) ו-B נמצאים על הצירים.
נתון : C (8, 8). מבלי למצוא את שיעורי הקודקודים B ו-D מצאו
את משוואת המעגל החוסם את המלבן ABCD.

המעגל צריך לעבור בכל אחת מהנקודות. בפרט בנקודות A(0,2), C(8,8). במלבן הזוויות ישרות, בפרט $\angle D$. מכאן כי הקטע AC הוא קוטר במעגל, שכן זווית היקפית ישרה ($\angle D$) בהכרח נשענת על קוטר. כלומר, $R = \frac{1}{2} AC$. נמצא את אורך AC :

$$d(A, C) = \sqrt{(8-0)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \rightarrow R = 5$$

ולכן משוואת המעגל תהיה מהצורה :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 25$$

מכיוון ש-AC קוטר, מרכז המעגל (a, b) הוא פשוט אמצע AC. לכן :

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 8}{2} = 4$$

$$b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

וקיבלנו שמשוואת המעגל החוסם את המלבן היא :

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

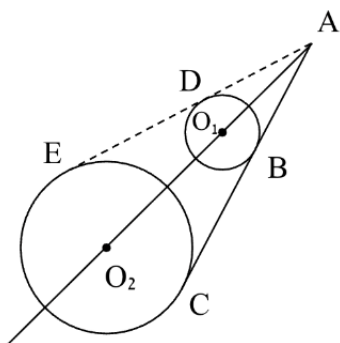
סיכום - גיאומטריה אנליטית

שאלת סיכום על המעגל:

הקטע AC משיק למעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 בנקודות B ו-C בהתאמה, כמתואר בשרטוט.

הנקודה B היא אמצע הקטע AC. משוואות הישרים AC ו- O_1O_2 הן בהתאמה: $y = 2x - 15$

ו. $y = x - 3$. שיעור ה־x של הנקודה O_1 גדול ב־5 משיעור ה־x של הנקודה O_2 .



א. מבלי למצוא את שיעורי הנקודה A, מצאו את משוואות המעגלים

בהינתן ששיעורי המרכזים O_1 ו- O_2 הם מספרים שלמים.

ב. הנקודה A היא מרכזו של מעגל שלישי, ששטחו שווה לסכום שטחי

המעגלים הנתונים בשרטוט. מצאו את משוואת המעגל השלישי.

ג. הישר AE משיק למעגלים בנקודות D ו-E כמתואר בשרטוט.

המעגל שמצאת בסעיף ב' חותך את הישר AE בנקודה P. קבעו אם

הנקודה P נמצאת בין הנקודות A ו-D או בין הנקודות D ו-E. הסבירו.

פתרון :

א. מכיוון ש- O_1, O_2 על הישר $y = x - 3$ הן מהצורה $O_1(x_1, x_1 - 3), O_2(x_2, x_2 - 3)$. נתון, $x_1 = x_2 + 5$.

ולכן $x_2 = x_1 - 5$. נציב: $O_2(x_1 - 5, x_1 - 8)$.

מכיוון ש- B אמצע הקטע AC ומכיוון ש- AC משיק למעגלים ועל כן מאונך לרדיוסים O_1B , O_2C , נקבל ש- DB

קטע אמצעים במשולש AO_2C , שכן $O_1B \parallel O_2C$. מכאן כי $R_2 = 2R_1$. נחשב:

$$O_2C = d(O_2, -2x + y + 15 = 0) = \frac{|-2 \cdot (x_1 - 5) + x_1 - 8 + 15|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-x_1 + 17|}{\sqrt{5}}$$

$$O_1B = d(O_1, -2x + y + 15 = 0) = \frac{|-2x_1 + x_1 - 3 + 15|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-x_1 + 12|}{\sqrt{5}}$$

מכאן כי :

$$|-x_1 + 17| = 2|-x_1 + 12|$$

מקרה א':

$$-x_1 + 17 = -2x_1 + 24 \rightarrow x_1 = 7 \rightarrow O_1(7,5), O_2(2,-1)$$

מקרה ב':

$$x_1 - 17 = -2x_1 + 24 \rightarrow 3x_1 = 41 \rightarrow x_1 = 13.6667$$

אבל נתון ש- x_1 מספר שלם, ופתרון זה נפסל. נציב בנוסחאות המרחק $x_1 = 7$ ונקבל $R_1 = \sqrt{5}, R_2 = -2\sqrt{5}$

לכן המעגל שמרכזו O_1 : $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 5$ והמעגל שמרכזו O_2 : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 20$

סיכום - גיאומטריה אנליטית

ב. הנקודה A היא מפגש הישרים AC, O_1O_2 :

$$x_A - 3 = 2x_A - 15 \rightarrow x_A = 12 \rightarrow A(12,9)$$

לכן משוואת המעגל שמרכזו A היא מהסוג:

$$(x - 12)^2 + (y - 9)^2 = R_A^2$$

נחשב את שטחי המעגלים O_1, O_2 :

$$S_{O_1} = \pi R_1^2 = 5\pi, \quad S_{O_2} = \pi R_2^2 = 20\pi$$

ולכן שטח המעגל שמרכזו A הוא 25π . אם נסתכל על הנוסחה $\pi R_A^2 = 25\pi$ נקבל $R = 5$. מכאן כי המעגל שמרכזו בנקודה A הוא:

$$(x - 12)^2 + (y - 9)^2 = 25$$

ג. מכיוון ששני משיקים למעגל היוצאים מאותה הנקודה שווים זה לזה, הבעיה סימטרית ושקולה לשאלה היכן המעגל שמרכזו A חותך את המשיק AC . נחפש נקודה שנמצאת גם על המעגל וגם על הישר:

$$\begin{cases} (x_{P'} - 12)^2 + (y_{P'} - 9)^2 = 25 \\ y_{P'} = 2x_{P'} - 15 \end{cases}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$(x_{P'} - 12)^2 + (2x_{P'} - 15 - 9)^2 = 25$$

$$(x_{P'} - 12)^2 + (2x_{P'} - 24)^2 = 25 \rightarrow (x_{P'} - 12)^2 + 4(x_{P'} - 12)^2 = 25$$

$$5(x_{P'} - 12)^2 = 25$$

$$(x_{P'} - 12) = \pm\sqrt{5}$$

$$x_{P'} = 12 \pm \sqrt{5}$$

וקיבלנו $P'_1(14.236, 13.472), P'_2(9.763, 4.528)$. מכיוון ש- $A(12,9), P'_1$ נפסל.

נזכור ש- $O_2(2, -1)$, ולכן P' נמצאת מעל נקודה זו, כלומר, P' בין A ל- B , ועל פי הסימטריות, P בין A ל- D .

סיכום - גיאומטריה אנליטית

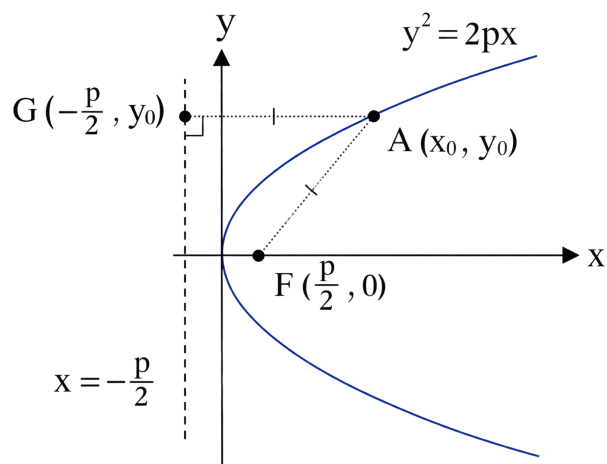
פרבולה:

הערה: שימו לב שלא מדובר בפרבולה הקלאסית שאנחנו מכירים, פונקציה $y = ax^2 + bx + c$, מכיתה ט'.

הגדרת פרבולה ופרבולה קנונית:

פרבולה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה נתונה ומישר נתון. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הנתון נקרא מדריך הפרבולה.

פרבולה תהיה מהסוג $y^2 = 2px$ כאשר $(\frac{p}{2}, 0)$ הוא קודקוד הפרבולה ו- $x = -\frac{p}{2}$ הוא מדריך הפרבולה, נקראת גם פרבולה קנונית. זו תהיה הפרבולה היחידה שנצטרך להרחיב עליה כחומר לבגרות.



תכונות הפרבולה הקנונית:

הפרבולה הקנונית $y^2 = 2px$ מקיימת את ההבאים:

- כאשר $p > 0$, הפרבולה נמצאת מימין לציר ה-y והמדריך $x = -\frac{p}{2}$ משמאל לו.
- כאשר $p < 0$, הפרבולה נמצאת משמאל לציר ה-y והמדריך $x = \frac{p}{2}$ מימין לו.
- הפרבולה סימטרית ביחס לציר ה-x. כלומר, אם הנקודה (x_1, y_1) על הפרבולה, אז גם הנקודה $(x_1, -y_1)$ על הפרבולה.

קטעים בפרבולה:

- מיתר בפרבולה הוא כל קטע המחבר בין 2 נקודות הנמצאות על הפרבולה.
- קוטר בפרבולה הוא כל ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה, $y = 0$.
- רדיוס הפרבולה, או וקטור רדיוס הפרבולה, הוא המרחק שבין נקודה כלשהי על הפרבולה לבין מוקד הפרבולה. לדוגמה, בשרטוט העילי, AF הוא רדיוס הפרבולה.

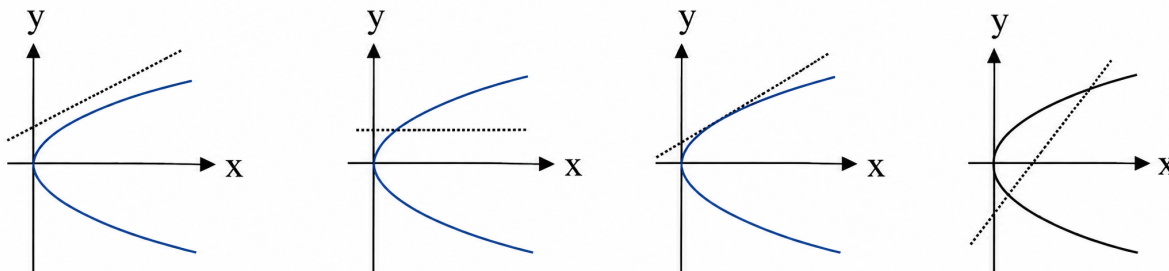
טיפ: סימון חכם של נקודה על הפרבולה בעזרת פרמטר, עדיף שיתבצע ע"י הצבת הפרמטר כערך ה-y כדי להימנע מביטוי עם שורשים.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

מצבים הדדיים בין ישר לבין פרבולה:

ישנם ארבעה מצבים הדדיים בין ישר ופרבולה:

חיתוך בשתי נקודות השקה בנקודה אחת חיתוך בנקודה אחת זרים: אין נקודה משותפת



ישר משיק לפרבולה:

הישר $y = mx + b$ משיק לפרבולה $y^2 = 2px$ אם ורק אם $p = 2mb$. לדוגמה, הישר $y = 2x - 3$ משיק לפרבולה $y^2 = -12x$ שכן $12 = 2 \cdot 2 \cdot (-3)$.

משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (x_0, y_0) שעל הפרבולה היא $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$. אם נפשט את הביטוי נקבל משוואת משיק: $y = \frac{p}{y_0}x + \frac{p}{y_0}x_0$.

לדוגמה, משוואת המשיק לפרבולה בנקודה $y^2 = 6x$ בנקודה $(5, \sqrt{30})$ היא:

$$y = \frac{3}{\sqrt{30}}x + \frac{15}{\sqrt{30}} = \sqrt{0.3}x + \sqrt{7.5}$$

שימו לב שבהינתן p ו- y_0 ניתן למצוא את שיפוע המשיק.

מעגל משיק לפרבולה:

מעגל שמרכזו על ציר ה- x , המשיק לפרבולה, משיק לה בשתי הנקודות $C(x_1, y_1)$, $D(x_1, -y_1)$. הפרבולה סימטרית ביחס לציר ה- x ולכן לשתי הנקודות אותו שיעור x .

נציב את משוואת הפרבולה $y^2 = 2px$ בתוך משוואת המעגל $(x - a)^2 + y^2 = R^2$:

$$(x - a)^2 + 2px = R^2 \rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + 2px = R^2 \rightarrow x^2 - (2a - 2p)x + a^2 - R^2 = 0$$

נוסחת שורשים:

$$x_{1,2} = \frac{2a - 2p \pm \sqrt{(2a - 2p)^2 - 4(a^2 - R^2)}}{2}$$

נסמן את הביטוי שתחת השורש כ- Δ , ונשווה דיסקרימיננטה. אם $\Delta > 0$ אז למעגל 2 נקודות השקה. אם $\Delta = 0$ אז למעגל נקודת השקה אחת בלבד. אם $\Delta < 0$ אז המעגל אינו משיק לפרבולה באף נקודה.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

תרגיל מבגרות (קיץ, 2026 מועד ב') - פרבולה:

נתון הישר $y = x$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$.

p הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.

א. הביעו באמצעות p את שיעורי הנקודה A .

נסמן ב- ℓ את המשיק לפרבולה בנקודה A .

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. מעגל I שמרכזו בנקודה F משיק לישר ℓ בנקודה B .

ב. הביעו באמצעות p את משוואת מעגל I .

ג. הראו כי הנקודה B נמצאת על ציר ה- y .

נתון: $AB = 4\sqrt{5}$.

ד. מצאו את הערך של p .

א. נציב את הישר $y = x$ במשוואת הפרבולה $y^2 = 2px$:

$$x^2 = 2px \rightarrow x^2 - 2px = 0 \rightarrow x(x - 2p) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2p$$

מכיוון שהנקודה A נמצאת ברביע הראשון, חייב להתקיים $x_A > 0$. לכן $A(2p, 2p)$ מפני ש- $p > 0$.

ב. המשיק לפרבולה בנקודה $A(2p, 2p)$ הוא: $y = \frac{p}{2p}x + \frac{p}{2p} \cdot 2p = \frac{1}{2}x + p$. הנקודה F היא מוקד

הפרבולה ולכן $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. לכן משוואת המעגל שמרכזו בנקודה F היא $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = R^2$. רדיוס המעגל

הוא המרחק בין F לישר ℓ :

$$R = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} + 1 \cdot 0 - p \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\left| -\frac{p}{4} - p \right|}{\sqrt{1.25}} = \frac{\sqrt{5}}{2}p$$

ולכן משוואת המעגל היא $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}p^2$.

ג. הנקודה B היא מפגש בין המעגל $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}p^2$ לישר $y = \frac{1}{2}x + p$:

$$\begin{aligned} \left(x_B - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_B + p\right)^2 &= \frac{5}{4}p^2 \rightarrow x_B^2 - px_B + \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}x_B^2 + px_B + p^2 = \frac{5}{4}p^2 \\ \rightarrow \frac{5}{4}x_B^2 + \frac{5}{4}p^2 &= \frac{5}{4}p^2 \rightarrow x_B = 0 \end{aligned}$$

ולכן הנקודה B על ציר ה- y ושיעוריה $B(0, p)$.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

ד. נמצא פרמטרית את המרחק מהנקודה $A; (2p, 2p)$ לנקודה $B(0, p)$ ונשווה לנתון :

$$d(A, B) = \sqrt{(2p - 0)^2 + (2p - p)^2} = \sqrt{4p^2 + p^2} = \sqrt{5p^2} =^{p>0} \sqrt{5}p$$

נשווה :

$$\sqrt{5}p = 4\sqrt{5} \rightarrow p = 4$$

האליפסה:

הגדרת האליפסה:

האליפסה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע. הנקודות הנתונות נקראות מוקדי האליפסה.

כאשר מוקדי האליפסה הם הנקודות $F_2(-c, 0), F_1(c, 0)$, האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משני המוקדים הוא קבוע ושווה ל- $2a$.

המשוואה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ נקראת המשוואה הקנונית של האליפסה, ועבור המוקדים $F_2(-c, 0), F_1(c, 0)$ מתקיים הקשר: $a^2 = b^2 + c^2$.

קטעים באליפסה:

- מיתר: כל קטע המחבר שתי נקודות על האליפסה נקרא מיתר.
- קוטר: קטע המחבר שתי נקודות על האליפסה ועובר דרך ראשית הצירים נקרא קוטר האליפסה.
- רדיוסים: הקטעים המחברים כל נקודה הנמצאת על האליפסה עם שני המוקדים, נקראים רדיוסים באליפסה, והם מסומנים כ- r_1, r_2 בדרך כלל. לכל נקודה הנמצאת על האליפסה יש שני רדיוסי אליפסה משלה, וסכום אורכיהם הוא תמיד $2a$: לכל נקודה מתקיים $r_1 + r_2 = 2a$.

ניתן להגדיר נוסחה לרדיוסי האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ בנקודה (x_1, y_1) :

$$r_1 = a - \frac{cx_1}{a} \quad \text{אורך הרדיוס הימני:}$$

$$r_2 = a + \frac{cx_1}{a} \quad \text{אורך הרדיוס השמאלי:}$$

סיכום - גיאומטריה אנליטית

תכונות האליפסה:

1. האליפסה חותכת את ציר ה- x בנקודות $(a, 0)$ ו- $(-a, 0)$. הקטע המחבר ביניהן נקרא הציר האופקי של האליפסה, ואורכו $2a$.
2. שיעורי ה- x של כל הנקודות הנמצאות על האליפסה מקיימים: $-a \leq x \leq a$.
3. האליפסה חותכת את ציר ה- y בנקודות $(0, b)$, $(0, -b)$. הקטע המחבר ביניהן נקרא הציר האנכי של האליפסה, ואורכו $2b$.
4. שיעורי ה- y של כל הנקודות הנמצאות על האליפסה מקיימים: $-b \leq y \leq b$.

בבגרות 572 עוסקים באליפסות שמשוואותיהן קנוניות, ושבהן הציר האופקי שאורכו $2a$ גדול מהציר האנכי שאורכו $2b$. במילים אחרות, $a > b$.

הסימטריה של האליפסה:

אם נציב במשוואת האליפסה הקנונית את $(-x)$ במקום x או את $(-y)$ במקום y , המשוואה לא תשתנה. במילים אחרות, אם (x, y) על האליפסה, כך גם $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. כלומר, האליפסה סימטרית ביחס לציר ה- x וביחס לראשית הצירים.

מצבים הדדיים בין נקודה לאליפסה:

בין נקודה (x_0, y_0) לאליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ עשוי להיות אחד מהמצבים ההדדיים הבאים:

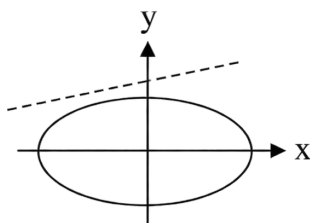
1. הנקודה נמצאת על האליפסה. הדבר מתקיים אם ורק אם אכן בהצבת הנקודה במשוואת האליפסה מתקבל שוויון.
2. הנקודה נמצאת בתוך האליפסה. הדבר מתקיים אם $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.
3. הנקודה נמצאת מחוץ לאליפסה. הדבר מתקיים אם $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

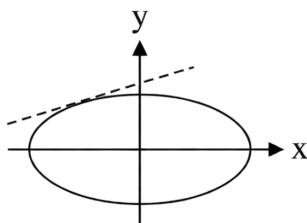
מצבים הדדיים בין ישר לבין אליפסה:

קיימים שלושה מצבים הדדיים אפשריים בין ישר לבין אליפסה:

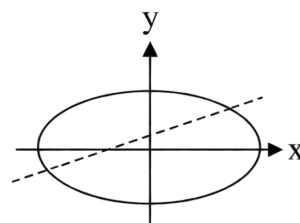
מצב שבו לישר ולאליפסה
אין אף נקודה משותפת.



ישר משיק לאליפסה,
ויש לו ולאליפסה
נקודה אחת משותפת.



ישר חותך אליפסה,
ויש לו ולאליפסה
שתי נקודות משותפות.



כדי לקבוע מה הוא המצב ההדדי בין ישר לאליפסה, נציב את משוואת הישר במשוואת האליפסה, כך שתתקבל נוסחת שורשים עם דיסקרימיננטה Δ .

אם $\Delta > 0$ הישר חותך את האליפסה.

אם $\Delta = 0$ הישר משיק לאליפסה.

אם $\Delta < 0$ הישר זר לאליפסה.

הקשר בין מעגל לאליפסה:

מעגל שמשוואתו קנונית הוא מקרה פרטי של אליפסה שמשוואתה קנונית, ובה $c = 0$, ולכן $a = b$. כלומר: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ומכאן נקבל $x^2 + y^2 = a^2$. מכיוון ש- $c = 0$ נקבל שמוקדי האליפסה מתאחדים לראשית הצירים כמרכז המעגל.

הזזה אנכית ואופקית של אליפסה שמשוואתה קנונית:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ נתונה האליפסה}$$

עבור $t > 0$: האליפסה $\frac{(x-t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת האליפסה הנתונה t יחידות ימינה.

האליפסה $\frac{(x+t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת האליפסה הנתונה t יחידות שמאלה.

האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת האליפסה הנתונה t יחידות מעלה.

האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y+t)^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת האליפסה הנתונה t יחידות מטה.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

שאלת בגרות - אליפסה:

נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k הוא פרמטר חיובי.

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב. (1) מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF .

(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D .

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D .

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 15.

אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .

א. נבדוק מה נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x :

$$\frac{x^2}{25k^2} + \frac{0^2}{16k^2} = 1 \rightarrow x^2 = 25k^2 \rightarrow x = \pm 5k \xrightarrow{k>0} x = 5k$$

ולכן הנקודה היא $(5k, 0)$.

נסמן $F(c, 0)$. ידוע מתכונות האליפסה כי $3k = \sqrt{25k^2 - 16k^2} = \sqrt{9k^2} = \sqrt{25k^2 - 16k^2}$. כלומר מוקד האליפסה החיובי הוא $F(3k, 0)$. על כן משוואת המעגל תהיה מהסוג:

$$(x - 3k)^2 + y^2 = R^2$$

נציב את הנקודה $(5k, 0)$:

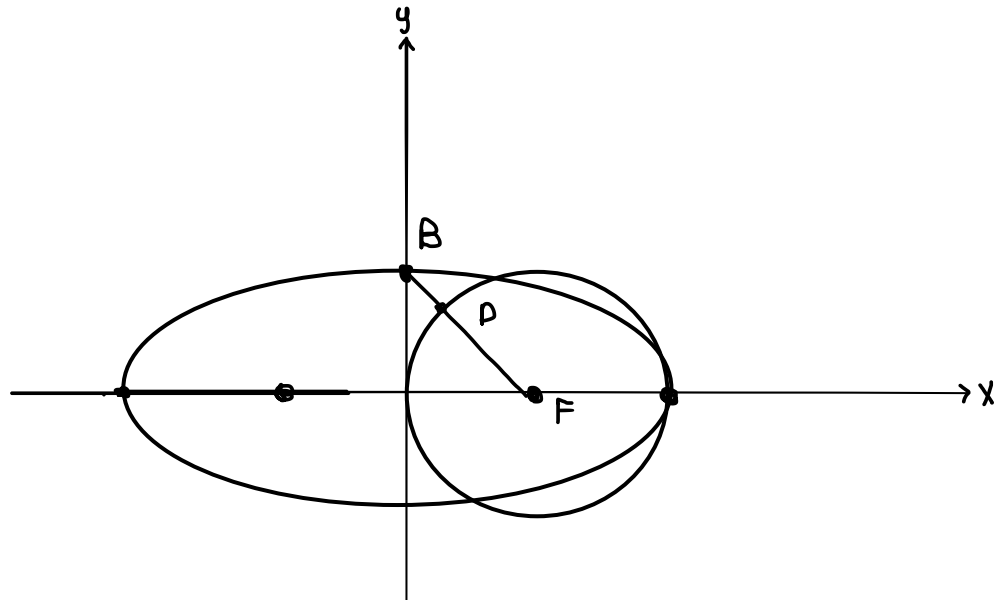
$$(5k - 3k)^2 = R^2$$

$$R^2 = 4k^2$$

ומשוואת המעגל המתקבלת היא $(x - 3k)^2 + y^2 = 4k^2$.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

ב(1). נשרטט מה שנתון לנו עד כה :



נמצא את B :

$$\frac{0^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1 \rightarrow y^2 = 16k^2 \rightarrow^{k>0} y = 4k \rightarrow B(0,4k)$$

DF הוא רדיוס במעגל ולכן אורכו $2k$. נמצא את אורך BF :

$$d(B, F) = \sqrt{(0 - 3k)^2 + (4k - 0)^2} = \sqrt{9k^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$$

נשים לב ש- $BF = BD + DF = BD + 2k = 5k \rightarrow BD = 3k$.

$$\frac{BD}{DF} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2} = 1.5$$

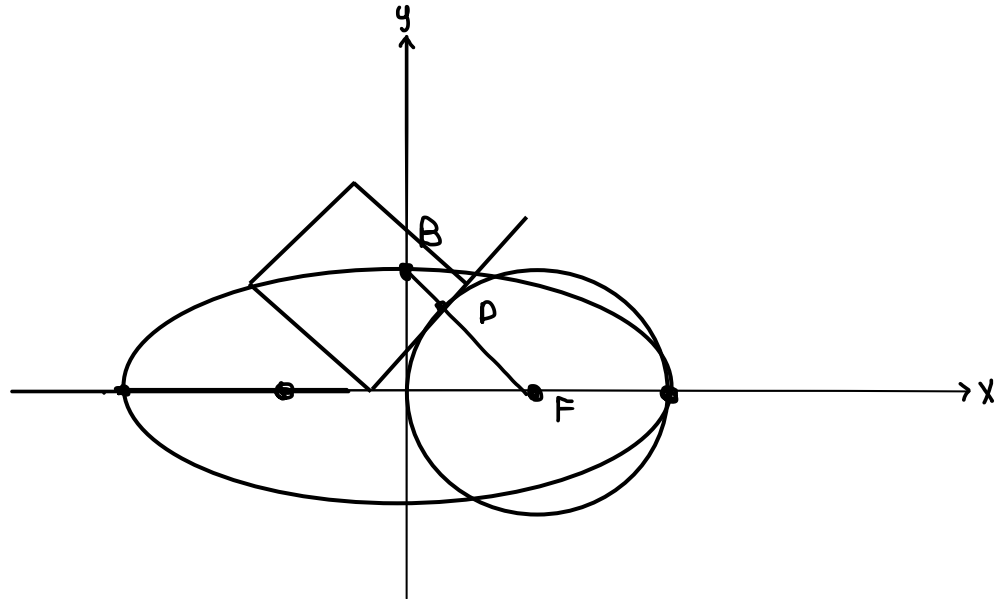
ב(2). ניעזר בנוסחת חלוקת קטע ביחס נתון:

$$\begin{aligned}x_D &= \frac{0 \cdot 2 + 3k \cdot 3}{5} = \frac{9k}{5} \\y_D &= \frac{4k \cdot 2 + 0 \cdot 3}{5} = \frac{8k}{5}\end{aligned}$$

ולכן $D\left(\frac{9k}{5}, \frac{8k}{5}\right)$.

ג. משוואת המשיק למעגל $(x - 3k)^2 + y^2 = 4k^2$ בנק' $D(1.8k, 1.6k)$ ע"פ נוסחת משיק למעגל היא:

$$\begin{aligned}(1.8k - 3k)(x - 3k) + 1.6ky &= 4k^2 \\ -1.2k(x - 3k) + 1.6ky &= 4k^2 \\ -1.2x + 3.6k + 1.6y &= 4k \\ y &= 0.75x + 0.25k\end{aligned}$$



נפשט את משוואת המשיק:

$$4y = 3x + k$$

$$3x - 4y + k = 0$$

הישר הרצוי מקביל למשיק ועל כן הוא מהצורה:

$$3x - 4y + b = 0$$

המרחק בין הישרים הוא 15 יח':

$$\frac{|b - k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|b - k|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|b - k|}{5}$$

כלומר,

$$|b - k| = 75$$

$$b_1 = 75 + k$$

$$b_2 = k - 75$$

כלומר הישר הוא או $-3x + 4y - 75 - k = 0$ או $-3x + 4y - k + 75 = 0$. נציב את שיעורי הנקודה B במטרה לקבל ערך שלילי באגף שמאלי - שמשמעותו שהנקודה מתחת לישר:

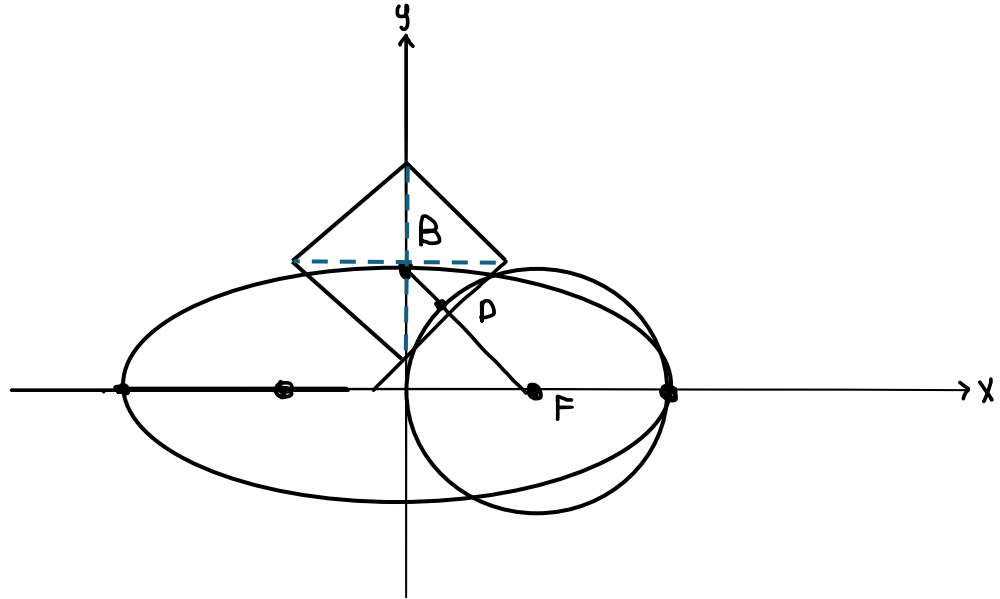
$$-3 \cdot 0 + 4k - k + 75 = 3k + 75 >^k > 0$$

$$-3 \cdot 0 + 4k - 75 - k = 3k - 75$$

המשוואה הראשונה נפסלת כי בוודאות מתקבל ערך חיובי. המשוואה השנייה אפשרית עבור $0 < k < 25$ ועל כן נבחר בה:

$$-3x + 4y - 75 - k = 0$$

ה.



אם הנקודה B היא מפגש אלכסוני הריבוע, היא מהווה את מרכז הריבוע, ולכן המרחק שלה מכל אחת מצלעות הריבוע הוא 7.5. נציב בנוסחת מרחק בין הנקודה $B(0,4k)$ והישר $-3x + 4y - k = 0$:

$$\frac{|0 \cdot (-3) + 4k \cdot 4 - k|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|15k|}{5} \stackrel{k>0}{=} \frac{15k}{5} = 3k$$

כלומר, $3k = 7.5$ ולכן $k = 2.5$.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

ההיפרבולה:

הגדרה:

ההיפרבולה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות F_2, F_1 הוא קבוע. הנקודות F_2, F_1 נקראות מוקדי ההיפרבולה.

כאשר המוקדים הם $F_2(-c, 0), F_1(c, 0)$, ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משני המוקדים הוא קבוע ושווה ל- $2a$.

משוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ נקראת גם המשוואה הקנונית של ההיפרבולה, ומקיימת: $c^2 = a^2 + b^2$.

קטעים בהיפרבולה:

ההיפרבולה בנויה משני ענפים שעוברים בנקודות $(a, 0), (-a, 0)$, אשר נקראים גם קודקודי ההיפרבולה.

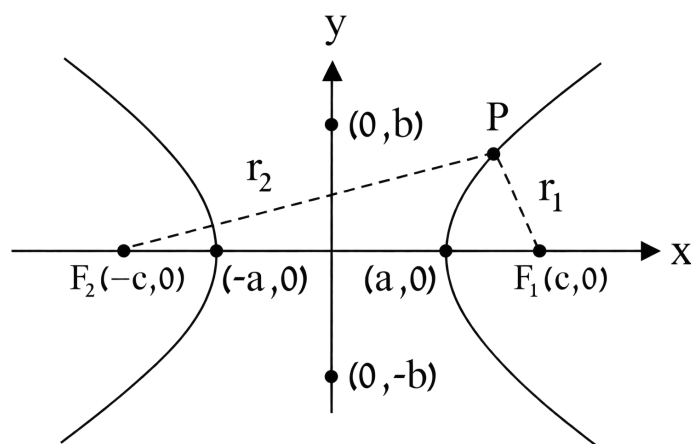
הקטע המחבר בין קודקודי ההיפרבולה נקרא הציר הראשי/הממשי של ההיפרבולה, ואורכו $2a$.

אם נקודה P נמצאת על אחד מענפי ההיפרבולה, המרחק שלה מהמוקד החיובי $F_1(c, 0)$ נקרא הרדיוס r_1 והמרחק שלה מהמוקד השלילי $F_2(-c, 0)$ נקרא הרדיוס r_2 . הרדיוסים מקיימים: $|r_1 - r_2| = 2a$.

נסמן על ציר ה- y את הנקודות $(0, b), (0, -b)$. הקטע המחבר ביניהן נקרא גם הציר המשוני/המדומה של ההיפרבולה, ואורכו $2b$.

נקודת החיתוך של הציר הראשי והמשני נקראת מרכז ההיפרבולה, ובהיפרבולה קנונית תימצא בראשית הצירים.

כל קטע המחבר שתי נקודות על ההיפרבולה נקרא מיתר. שתי הנקודות יכולות להיות על אותו ענף, או כל אחת על ענף אחר.



סיכום - גיאומטריה אנליטית

היפרבולה שוות-שוקיים:

כאשר הציר הראשי והציר המשני שווים באורכם, מתקבלת היפרבולה שוות-שוקיים שבה $a = b$. כלומר, משוואתה הקנונית של היפרבולה שוות-שוקיים היא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, כלומר, $x^2 - y^2 = a^2$ (שימו לב שלא מדובר במשוואת מעגל!).

הסימטריה של ההיפרבולה:

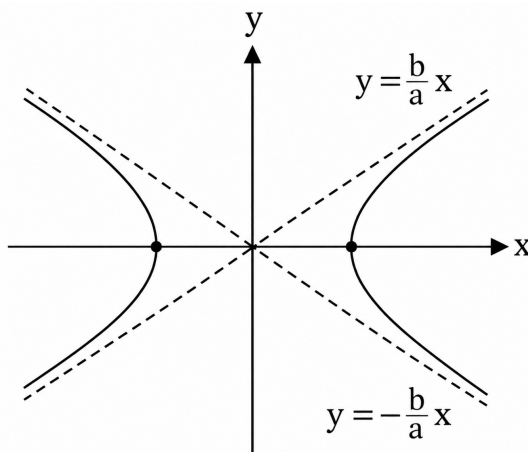
אם הנקודה (x, y) נמצאת על ההיפרבולה, אז בהכרח גם הנקודות $(-x, -y)$, $(-x, y)$, $(x, -y)$ נמצאות על ההיפרבולה. כלומר, ההיפרבולה סימטרית ביחס לציר ה- x וביחס לראשית הצירים.

האסימפטוטות של ההיפרבולה:

בלימודי החדו"א בכיתה י"א למדנו רק שני סוגים של אסימפטוטות: אסימפטוטה אופקית, ששיפועה 0, ואסימפטוטה אנכית, שאינה ברת ייצוג כפונקציה, אלא כישר בלבד.

סוג נוסף של אסימפטוטות הוא אסימפטוטה המוגדרת כפונקציה עם שיפוע שונה מ-0. כלומר, אסימפטוטה המיוצגת ע"י משוואת קו ישר. לאסימפטוטה זו נקרא גם אסימפטוטה משופעת. אין צורך להשתמש בכלים כגון חשבון גבולות כדי למצוא את האסימפטוטות הללו, אלא נמצא אותם בעזרת נוסחאות נתונות.

להיפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$. נשים לב שאם מדובר בהיפרבולה שוות-שוקיים, האסימפטוטות יהיו $y = x$, $y = -x$, אשר מאונכות זו לזו.



רדיוסי ההיפרבולה:

כפי שהצגנו קודם, עבור כל נקודה על ההיפרבולה r_1 הוא מרחקה מן המוקד $F_1(c, 0)$ ו- r_2 הוא מרחקה מן המוקד $F_2(-c, 0)$.

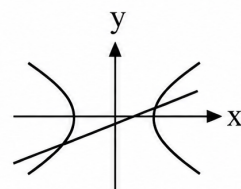
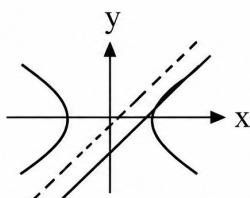
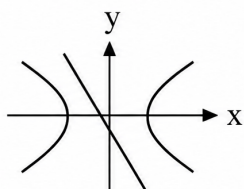
נוסחאות אורכי הרדיוסים בנקודה $P(x_1, y_1)$:

$$r_1 = \left| \frac{cx_1}{a} - a \right|, \quad r_2 = \left| \frac{cx_1}{a} + a \right|$$

סיכום - גיאומטריה אנליטית

מצבים הדדיים בין ישר לבין היפרבולה:

ישר עשוי לחתוך היפרבולה בשתי נקודות.	לישר ולהיפרבולה עשויה להיות נקודה אחת משותפת אם הישר משיק להיפרבולה או אם הוא מקביל לאחת האסימפטוטות.	יתכן מצב מצב מצב לישר ולהיפרבולה אין אף נקודה משותפת.
---	--	--



בדיקת המצב ההדדי בין ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ לבין הישר $y = mx + c$ תתקבל על ידי הצבת משוואת הישר במשוואת ההיפרבולה כך שתתקבל אחת האפשרויות הבאות:

- קבלת טענה שגויה, כגון $2 = 0$. במקרה כזה, הישר $y = mx + c$ הוא אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה, ולכן אינו חותך אותה.
- אם נקבל משוואה מהסוג $x = k$ אז הישר מקביל לאחת האסימפטוטות וחותך אותה בנקודה אחת.
- אם נקבל משוואה ריבועית עם $\Delta < 0$ אז הישר אינו חותך את ההיפרבולה.
- אם נקבל משוואה ריבועית עם $\Delta = 0$ אז הישר משיק להיפרבולה.
- אם נקבל משוואה ריבועית עם $\Delta > 0$ אז הישר חותך את ההיפרבולה בשתי נקודות.

הזזה אנכית ואופקית של היפרבולה:

נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ עבור $t > 0$:

ההיפרבולה $\frac{(x-t)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת ההיפרבולה הנתונה למרחק של t יחידות ימינה.

ההיפרבולה $\frac{(x+t)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת ההיפרבולה הנתונה למרחק של t יחידות שמאלה.

ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת ההיפרבולה הנתונה למרחק של t יחידות מעלה.

ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y+t)^2}{b^2} = 1$ תתקבל מהזזת ההיפרבולה הנתונה למרחק של t יחידות מטה.

התנאי לקיום היפרבולה: ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ שמוקדיה $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ קיימת אם ורק אם:

$$a < c$$

נשתמש בזה כדי לפסול פתרונות אפשריים שיתקבלו בתרגילים.

סיכום - גיאומטריה אנליטית

שאלה ברמת בגרות - היפרבולה:

נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b > 0$, $a > 0$.

ישר ששיפועו $\frac{21}{4}$ חותך בנקודה A את האסימפטוטה של ההיפרבולה

ששיפועה חיובי,

ואת האסימפטוטה של ההיפרבולה ששיפועה שלילי הוא חותך בנקודה B.

שיעור ה-y של הנקודה A הוא 2 ושיעור ה-x של הנקודה B הוא 2.

א. חשבו את היחס $\frac{b}{a}$.

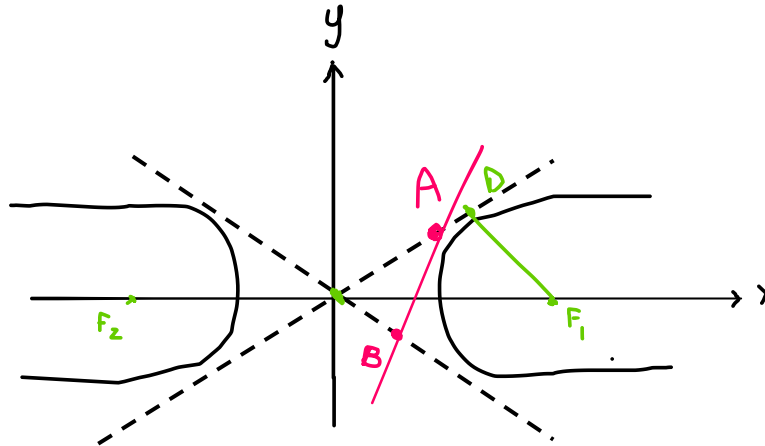
ב. דרך המוקד הימני F של ההיפרבולה מעבירים אנך לאסימפטוטה ששיפועה חיובי.

האנך חותך את האסימפטוטה בנקודה D.

מצאו את שטח המשולש ODF (O - ראשית הצירים),

אם המרחק של המוקד הימני F מהאסימפטוטה ששיפועה חיובי הוא 3.

א. נשרטט:



האסימפטוטה החיובית היא מהצורה $y = \frac{b}{a}x$. לכן הנקודה A היא $(x_A, \frac{b}{a}x_A)$. נתון, $y_A = 2$ ולכן $\frac{b}{a}x_A = 2$.

ולכן $x_A = \frac{2a}{b}$. כלומר, $A\left(\frac{2a}{b}, 2\right)$.

האסימפטוטה השלילית היא מהצורה $y = -\frac{b}{a}x$. לכן הנקודה B היא $(x_B, -\frac{b}{a}x_B)$. נתון, $x_B = 2$, ולכן

$x_B = 2$, כלומר $B\left(2, -\frac{2b}{a}\right)$.

שיפוע הישר AB הוא $\frac{21}{4}$:

סיכום - גיאומטריה אנליטית

$$\frac{2 + \frac{2b}{a}}{\frac{2a}{b} - 2} = \frac{1 + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{21}{4}$$

$$\text{נסמן } t = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1+t}{\frac{1}{t}-1} = \frac{21}{4}$$

$$4 + 4t = \frac{21}{t} - 21$$

$$4t + 4t^2 = 21 - 21t$$

$$4t^2 + 25t - 21 = 0$$

$$t = \frac{3}{4}, -7$$

מכיוון שנתון $a > 0, b > 0$ היחס ביניהם חייב להיות חיובי, ולכן $t = \frac{3}{4}$, כלומר היחס הרצוי הוא $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$.

ב. מהיחס בסעיף א' נקבל $b = \frac{3}{4}a$ ולכן ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{9}{16}a^2} = 1$ ומכאן כי:

$$c = \sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2} = \frac{5a}{3}$$

כלומר, הצלע OF באורך $\frac{5a}{3}$. אורך הגובה לצלע זו הוא שיעור ה- y של נקודה D .

משוואת האסימפטוטה החיובית:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x$$

ולכן משוואת האנך היא $y = -\frac{4}{3}x + k$. נציב את הנקודה $F(\frac{5a}{3}, 0)$:

$$0 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{5a}{3} + k \rightarrow k = \frac{20a}{9} \rightarrow DF: y = -\frac{4}{3}x + \frac{20a}{9}$$

הנקודה D היא החיתוך בין הישרים הללו:

$$\frac{3}{4}x = -\frac{4}{3}x + \frac{20a}{9}$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right)x = \frac{20a}{9} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 20a}{9 \cdot 25} = \frac{16}{15}a$$

$$y_D = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15}a = \frac{4}{5}a$$

סיכום - גיאומטריה אנליטית

וקיבלנו $S_{\Delta ODF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} a \cdot \frac{5}{3} a = \frac{2a^2}{3}$ ניעזר בנוסחת מרחק מנקודה לישר כדי למצוא את a :

הנקודה: $F(\frac{5a}{3}, 0)$

הישר: $y = \frac{3}{4}x$

$$d = \frac{\left| -\frac{3}{4} \cdot \frac{5a}{3} + 0 \cdot 1 + 0 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5a}{4}}{\frac{5}{4}} = a$$

ולכן $a = 3$, ואם נציב בנוסחת השטח נקבל $S_{\Delta ODF} = 2 \cdot \frac{9}{3} = 2 \cdot 3 = 6$ יח"ר.