

זהויות יסוד טריגונומטריות:

זהויות טריגונומטריות:

הגדרה: זהות טריגונומטרית היא נוסחה המציגה דרך פיתוח של מקרה ספציפי תלוי פונקציות טריגונומטריות בצורה אלגברית. הזהויות הטריגונומטריות מוכחות בעזרת שימוש במשולש ישר זווית ובמעגל היחידה.

! בסיכום זה לא יתבצעו הוכחות עבור הזהויות, אלא נמנה כל אחת ונציג דוגמת שימוש. מוזמנים לעיין בהעשרה במרשתת ולצפות בהוכחות רשמיות.

זהויות יסוד פנימיות

$\sin(\alpha)$:

(או במילים אחרות, פונקציית סינוס אי זוגית) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$$\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$$

דוגמאות לשימוש:

$$\sin(-40^\circ) = -\sin(40^\circ) = -0.643$$

$$\sin(22^\circ) = \sin(180^\circ - 22^\circ) = \sin(158^\circ) = 0.375$$

! פונקציית $\sin$ יודעת להחזיר ערכים בתחום $-1 \leq x \leq 1$ בלבד. לדוגמה, לא קיימת זווית עבורה מתקיים $\sin(a) = 3$.

$\cos(\alpha)$:

(או במילים אחרות, פונקציית קוסינוס זוגית) $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

$$-\cos(\alpha) = \cos(180^\circ - \alpha)$$

דוגמאות לשימוש:

$$\cos(-270^\circ) = \cos(270^\circ) = 0$$

$$-\cos(20^\circ) = \cos(180^\circ - 20^\circ) = \cos(160^\circ) = -0.937$$

! פונקציית $\cos$ יודעת להחזיר ערכים בתחום $-1 \leq x \leq 1$ בלבד. לדוגמה, לא קיימת זווית עבורה מתקיים $\cos(a) = 3$.

$\tan(\alpha)$:

(או במילים אחרות, פונקציית טנגנס אי זוגית) $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

$$-\tan(\alpha) = \tan(180^\circ - \alpha)$$

דוגמאות לשימוש:

$$\tan(-540^\circ) = -\tan(540^\circ) = 0$$

$$-\tan(540^\circ) = \tan(180^\circ - 540^\circ) = \tan(-360^\circ) = 0$$

! פונקציית $\tan$ אינה מוגבלת בערכים אשר יודעת להחזיר. לדוגמה: $\tan(89.427^\circ) = 100$.

זהויות יסוד מעורבות (שילוב של sin, cos, tan):

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - (-\alpha)) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

דוגמת שימוש:

$$\text{נוכיח כי } 1 = \sin^2(a) + \frac{1}{1+\tan^2(a)} :$$

$$\frac{1}{1+\tan^2(a)} + \sin^2(a) = \frac{1}{1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)}} + \sin^2(a) = \frac{1}{\frac{\cos^2(a) + \sin^2(a)}{\cos^2(a)}} + \sin^2(a) = \frac{\cos^2(a)}{\cos^2(a) + \sin^2(a)} + \sin^2(a) = \frac{\cos^2(a)}{1} + \sin^2(a) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \text{ המעבר בו עשינו שימוש ב-}^* \text{ עשה שימוש בזהות}$$

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1 \text{ המעבר בו עשינו שימוש ב-}^{**} \text{ עשה שימוש בזהות}$$

! ניתן לשלב זהויות כדי למצוא חוקיות לפי זווית בגודל שונה.

לדוגמה:

$$\begin{aligned} \sin(270^\circ + \alpha) &= \\ \sin(180^\circ + (90^\circ + \alpha)) &= \\ \sin(180^\circ - (-90^\circ - \alpha)) &= \\ \sin(-90^\circ - \alpha) &= \\ -\sin(90^\circ + \alpha) &= \\ -\cos(\alpha) & \end{aligned}$$

$$\text{וכך הוכחנו את הזהות } \sin(270^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha).$$