

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

המספר i :

במאה ה-19, מתמטיקאי בשם ג'ירולמו קרדאנו יצר את המספר i המייצג את השורש הריבועי ל-(-1) שאינו מוגדר בשדה המספרים הממשיים, לצורך פתרון משוואות מורכבות. התחום התפתח עם השנים אך לא התקבל בקלות ובחוסר על ידי מתמטיקאים נוספים, שראו בתחום זה כבדיוני וחסר משמעות והיגיון. עם עבודתם של מתמטיקאים כגון גאוס ואוילר האגדיים, תורת המספרים המרוכבים חדרה עמוק ללב הפועם של המתמטיקה.

כפי שאמרנו קודם, $i = \sqrt{-1}$ ובכך מרחיב את שדה המספרים הממשי לשדה המספרים המרוכב. השימוש ב- $i = \sqrt{-1}$ מסייע גם בשורשים שליליים נוספים, לפי חוקי שורשים:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$$

למספר i תכונות חשובות:

$$i^2 = -1 \quad \text{א.} \quad i^3 = -i \quad \text{ב.} \quad i^4 = 1 \quad \text{ג.}$$

בעזרתן נוכל ליישם כל חזקה טבעית על i . לדוגמה:

$$i^{64} = i^{4 \cdot 16} = (i^4)^{16} = 1^{16} = 1$$

הגדרה של מספר מרוכב:

המספר z נקרא "מספר מרוכב" אם ורק אם הוא מספר מהצורה $z = a + bi$ כאשר a, b מספרים ממשיים ("ריגילים").

לדוגמה,

$z_1 = 5 + i$ הוא מספר מרוכב, כאשר החלק הממשי שלו הוא 5, והחלק המדומה שלו הוא 1 (המקדם של i).

$z_2 = 3i$ הוא מספר מרוכב (טהור*), כאשר החלק הממשי שלו הוא 0 והחלק המדומה שלו הוא 3.

$z_3 = 4$ הוא מספר ממשי, ולכן גם מרוכב (קבוצת המספרים הממשיים מוכלת במרוכבים), כאשר החלק הממשי שלו הוא 4 והחלק המדומה שלו הוא 0.

כדי להקל על הכתיבה:

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a$$

$$\operatorname{Im}(a + bi) = b$$

*מספר מרוכב טהור z הוא מספר מרוכב המקיים $\operatorname{Re}(z) = 0$. מספר ממשי טהור הוא מספר ממשי המקיים $\operatorname{Im}(z) = 0$.

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

משוואות ריבועיות מרוכבות:

עד כה, כאשר פתרנו משוואה ריבועית במחשבון והתקבלו שורשים עם " i ", הכרזנו 'אין פתרון'. הדבר דורש דיוק: אין פתרון ממשי. כעת נרחיב על הפתרון המרוכב.

כאשר הדיסקרימיננטה (תוכן השורש בנוסחת השורשים) של המשוואה שלילית, ניעזר ב- i לביטוי הפתרונות.

דוגמאות:

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 16}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8}i}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

לעיתים ניתקל גם במשוואות ריבועיות עם מקדמים המהווים מספר מרוכב בעצמם:

$$z^2 - (i + 8)z + i + 17 = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{i + 8 \pm \sqrt{(i + 8)^2 - 4i - 68}}{2} = \frac{i + 8 \pm \sqrt{i^2 + 16i + 64 - 4i - 68}}{2}$$
$$= \frac{i + 8 \pm \sqrt{-5 + 12i}}{2}$$

בהמשך נלמד איך אפשר לפשט את הפתרון עוד יותר.

פעולות בין מספרים מרוכבים:

$$z = a + bi, \quad w = c + di, \quad e \text{ ממשי טהור}$$
$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$
$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$e \cdot z = e(a + bi) = ae + bei$$

דוגמאות:

$$1. \quad (1 + 2i) + (3 - i) = 4 + i$$
$$2. \quad (4 - 2i) - (2 + 3i) = 2 - 5i$$
$$3. \quad (2 + i) \cdot (4 - i) = 8 - 2i + 4i + 1 = 9 + 2i$$
$$4. \quad 3(2 - i) = 6 - 2i$$

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

שוויון בין מספרים מרוכבים כמערכת משוואות:

ראינו שכל מספר מרוכב אפשר לייצג בצורה $a + bi$ עבור a, b ממשיים.

מתי נוכל להגדיר שהמספר $a + bi$ שווה למספר $c + di$? רק כאשר $a = c$ וגם $b = d$.

מכאן מתקבלת מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

נסתכל על דוגמה שראינו קודם לכן:

$$\begin{aligned} z^2 - (i + 8)z + i + 17 &= 0 \\ z_{1,2} &= \frac{i + 8 \pm \sqrt{(i + 8)^2 - 4i - 68}}{2} = \frac{i + 8 \pm \sqrt{i^2 + 16i + 64 - 4i - 68}}{2} \\ &= \frac{i + 8 \pm \sqrt{-5 + 12i}}{2} \end{aligned}$$

אנחנו רוצים "להיפטר" מהשורש - למצוא מספר מרוכב שיתאים לתוצאת השורש. נקרא לו $a + bi$.

$$\begin{aligned} a + bi &= \sqrt{-5 + 12i} \\ (a + bi)^2 &= -5 + 12i \\ a^2 + 2abi - b^2 &= -5 + 12i \\ (a^2 - b^2) + (2ab)i &= -5 + 12i \end{aligned}$$

התקבלה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ ab = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ b = \frac{6}{a} \end{cases}$$

נציב:

$$\begin{aligned} a^2 - \left(\frac{6}{a}\right)^2 &= -5 \\ a^2 - \frac{36}{a^2} &= -5 \\ a^4 - 36 &= -5a^2 \\ a^4 + 5a^2 - 36 &= 0 \\ (a^2)^2 + 5a^2 - 36 &= 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ b = \frac{6}{a} &\rightarrow b = \pm 3 \end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \frac{8+i \pm (2+3i)}{2} = \begin{cases} 5 + 2i \\ 3 - i \end{cases} \quad \text{לכן: שני המקרים נשמרים לפי ה-} \pm \text{ של נוסחת השורשים.}$$

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

הערך המוחלט:

הערך המוחלט של מספר מרוכב $z = a + bi$ מסומן $|z|$ ומוגדר להיות $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

דוגמאות:

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{\sqrt{3}^2}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|-3i| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|12| = \sqrt{(12)^2} = 12$$

תכונות הערך המוחלט עבור w, z מספרים מרוכבים:

1. עבור $z \neq 0$, $|z| > 0$.
2. $z = 0$ אם ורק אם $|z| = 0$.
3. $|wz| = |w| \cdot |z|$.
4. $\left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$.
5. אם $a > 0$ אז $|az| = a|z|$.
6. אם $a < 0$ אז $|az| = -a|z|$.

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad .7$$

הצמוד:

המספר הצמוד למספר המרוכב $z = a + bi$ מסומן $\bar{z}$ ומוגדר כך: $\bar{z} = a - bi$.

$$\overline{(5 + i)} = 5 - i, \text{ לדוגמה,}$$

תכונות המספר הצמוד:

1. $\overline{(\bar{z})} = z$.
2. $\overline{(wz)} = \bar{w} \cdot \bar{z}$.
3. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
4. אם a ממשי טהור אז $\bar{a} = a$.
5. $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$.
6. $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$.

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

פעולת החילוק בין מספרים מרוכבים:

כעת כשהכרנו את הערך המוחלט והצמוד, נוכל לדבר על פעולת החילוק בין מספרים מרוכבים:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

שימו לב שמדובר במעבר חוקי מכיוון שה- $\bar{\bar{z}} = z$ מצטמצמים. אולם, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ והוא מספר ממשי טהור. על כן נקבל:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$$

המכפלה במונה היא מספר מרוכב, והמנה היא מספר ממשי טהור. אפשר לכתוב את זה גם כך:

$$\frac{1}{|z|^2} (w \cdot \bar{z})$$

כלומר, מכפלה בין מספר ממשי טהור למספר מרוכב - וזו פעולה המוגדרת לנו מתחילת הסיכום, שמחזירה מספר מרוכב בהתאם.

מישור גאוס:

דרך נוספת להסתכל על מספר מרוכב $a + bi$ היא כעל זוג סדור (a, b) - נקודה במישור, המכונה מישור גאוס.

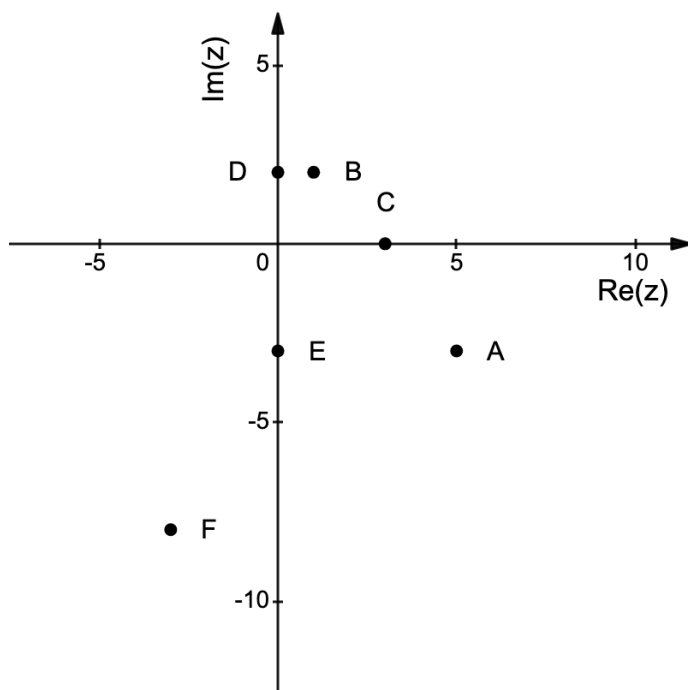
ציר ה- x של המישור הוא הציר הממשי - $Re(z)$.

ציר ה- y של המישור הוא הציר המדומה - $Im(z)$.

לדוגמה, אם:

$$A = 5 - 3i, \quad B = 1 + 2i, \quad C = 3, \quad D = 2i, \quad E = -3i, \quad F = -3 - 8i$$

נוכל למקם אותם כך על מישור גאוס:



סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

הערך המוחלט במישור גאוס:

הערך המוחלט של המספר המרוכב $z = a + bi$ במישור גאוס מתבטא במרחק בין הנקודה (a, b) לבין ראשית הצירים:

$$d((a, b), (0, 0)) = \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$$

המספר הצמוד במישור גאוס:

המספר הצמוד של המספר המרוכב $z = a + bi$ במישור גאוס יהיה מספר מרוכב חדש בנקודה $(a, -b)$. במילים אחרות, מדובר בשיקוף ביחס לציר ה- $Re(z)$. תכונה זו חשובה להבנה הגרפית שלנו בשאלות המערבות הנדסה אנליטית בעולם המרוכבים.

הצגה טריגונומטרית (פולארית) של מספרים מרוכבים:

אנחנו הכרנו את הייצוגים האלגבריים/קרטזיים של מספר מרוכב: $a + bi$ או (a, b) במישור גאוס. ייצוג נוסף שמאוד מעניין אותנו הוא הייצוג הטריגונומטרי - דרך לבטא מספר מרוכב כווקטור: חץ הנמתח עד לנקודה (a, b) עם אורך מסוים, אשר בינו לבין ציר ה- $Re(z)$ הממשי נוצרת זווית מסוימת.

ייצוג זה של מספר מרוכב, בעזרת אורך וזווית, הוא ייצוג פולארי, או טריגונומטרי: (r, θ) כאשר r הוא האורך ו- θ היא הזווית, או הארגומנט.

נשים לב שהאורך המדובר הוא בדיוק המרחק בין (a, b) מהראשית - $|a + bi|$. כלומר, $r_z = |z|$.

נשים לב לפי פיתגורס שהזווית הנוצרת בין הווקטור לנקודה (a, b) לבין חלקו החיובי של ציר ה- $Re(z)$ מקיימת $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.

תכונה חשובה מאוד של ייצוג טריגונומטרי היא נוסחת אוילר:

$$a = r \cdot \cos(\theta)$$

$$b = r \cdot \sin(\theta)$$

$$a + bi = r(\cos(\theta) + \sin(\theta) i)$$

או בקיצור, מקובל בתיכון לכתוב גם cis (קיצור של $\sin * i + \cos$). כלומר,

$$a + bi = r cis(\theta)$$

בעמוד הבא נתרגל מעבר בין הייצוגים.

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

מעבר בין הייצוג האלגברי לטריגונומטרי:

מעברים מייצוג אלגברי לייצוג טריגונומטרי:

$$1. \quad z = 3 + 4i$$

נשים לב שהנקודה היא $z(3,4)$ במישור גאוס. נמצא את ערכה המוחלט:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

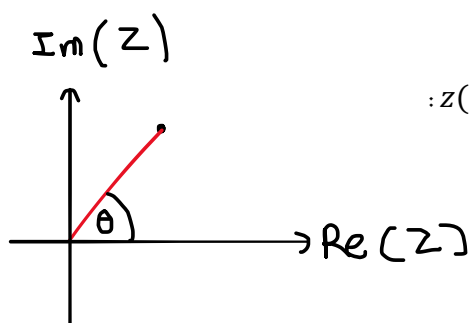
ולכן אפשר גם לסמן $r_z = 5$

הזווית שנוצרת בין הווקטור לנקודה $(3,4)$ לבין הציר הממשי החיובי היא θ המקיימת:

$$\tan(\theta) = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ + 180^\circ k$$

כדי לבחור את ערך ה- k נבדוק באיזה רביע במישור גאוס נמצאת הנקודה $z(3,4)$:



ברור לנו ש- $0 < \theta < 90^\circ$ ולכן נבחר $k = 0$, כלומר, $\theta = 53.13^\circ$. מכאן כי המספר z בתצוגה טריגונומטרית הוא $(5, 53.13^\circ)$ או $5cis(53.13^\circ)$.

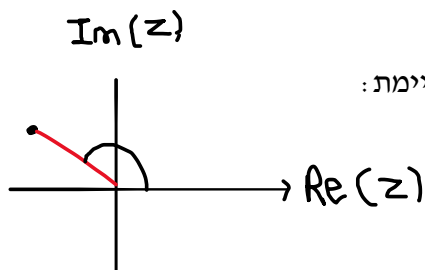
$$2. \quad z = -8 + 6i$$

נשים לב שהנקודה היא $z(-8,6)$ במישור גאוס. נמצא את ערכה המוחלט:

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

ולכן אפשר לסמן גם $r_z = 10$

הזווית שנוצרת בין הווקטור לנקודה $(-8,6)$ לבין הציר הממשי החיובי היא θ המקיימת:



$$\tan(\theta) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\theta = -36.87^\circ + 180^\circ k \quad // \quad 0 < \theta < 180^\circ$$

$$\theta = -36.87^\circ + 180^\circ = 143.13^\circ$$

$$z(10, 143.13^\circ) = 10cis(143.13^\circ)$$

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

מעברים מייצוג טריגונומטרי לייצוג אלגברי:

$$1. z = 5cis(53.13^\circ)$$

נזכור לפי נוסחת אוילר, שאם $z = a + bi$ אז $a = r\cos(\theta)$ ו- $b = r\sin(\theta)$ במילים אחרות:

$$z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

$$z = 5(\cos(53.13^\circ) + \sin(53.13^\circ)i)$$

$$z = 5 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.8 \cdot i = 3 + 4i$$

כלומר, $z = 3 + 4i$ בתצורה האלגברית.

$$2. z = 10cis(143.13^\circ)$$

$$z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

$$z = 10(\cos(143.13^\circ) + \sin(143.13^\circ)i)$$

$$z = 10 \cdot (-0.8) + 10 \cdot 0.6 \cdot i = -8 + 6i$$

כלומר, $z = -8 + 6i$ בתצוגה האלגברית.

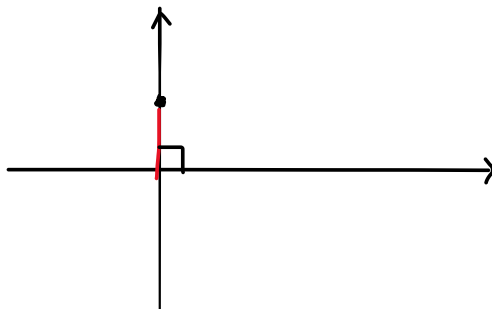
נשים לב שהמעבר מייצוג טריגונומטרי לאלגברי פשוט יותר מהמעבר ההפוך, ולכן בבגרות ישאלו ב-99% מהמקרים על מעבר מייצוג אלגברי לטריגונומטרי (אך **בנוסף** עשויים לשאול גם על המעבר מהטריגונומטרי לאלגברי).

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

מקרה מיוחד של מעבר ייצוגים - מספר מרוכב על אחד הצירים:

$$1. z = 3i$$

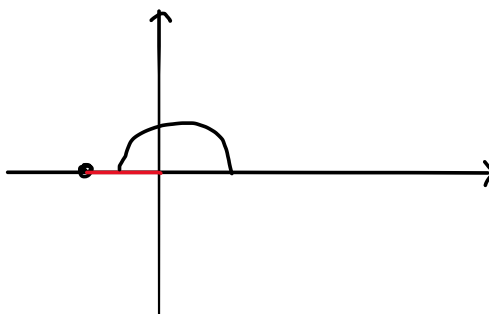
הערך המוחלט יהיה $|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{3^2} = 3$. אם נשרטט את הנקודה $(0,3)$ במישור גאוס:



נשים לב שהזווית היא בדיוק 90° . מכאן כי $z = 3\text{cis}(90^\circ)$. המקרה לא ניתן לפתרון לפי $\tan$ כיוון ש- $a = 0$ ותתקבל חלוקה באפס.

$$2. z = -3$$

הערך המוחלט יהיה $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$. אם נשרטט את הנקודה $(-3,0)$ במישור גאוס:



ניתן לראות שמדובר בזווית שטוחה של 180° . מכאן כי $z = 3\text{cis}(180^\circ)$.

המקרה ניתן לפתרון לפי $\tan$ אך פשוט יותר לפי שרטוט והבנת הקשר בין מיקום הנקודה לזווית.

ניתן מכאן להמשיך לפתח בעצמכם לכל המקרים בהם הנקודה על אחד הצירים...

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

פעולות על מספרים מרוכבים בייצוג טריגונומטרי:

הייצוג הטריגונומטרי מאוד נוח כאשר אנחנו נדרשים לבצע פעולות כמו מציאת מספר צמוד, כפל, חילוק והעלאה בחזקה.

המספר הצמוד:

המספר הצמוד $\bar{z}$ למספר $z = rcis(\theta)$ יהיה $\bar{z} = rcis(-\theta)$.

כפל מספרים מרוכבים:

יהי $z = r_1 cis(\alpha)$ ו- $w = r_2 cis(\beta)$. המכפלה בין המספרים המרוכבים מוגדרת להיות:

$$z \cdot w = (r_1 \cdot r_2) cis(\alpha + \beta)$$

חילוק מספרים מרוכבים:

יהי $z = r_1 cis(\alpha)$ ו- $w = r_2 cis(\beta)$. המנה בין המספרים המרוכבים מוגדרת להיות:

$$\frac{z}{w} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) cis(\alpha - \beta)$$

העלאה בחזקה - משפט דה-מואבר:

יהי $z = rcis(\theta)$. החזקה z^n מוגדרת כך:

$$z^n = r^n cis(n\theta)$$

הערה חשובה:

כאשר אנחנו משווים בין שני מספרים מרוכבים לפי הייצוג הטריגונומטרי שלהם, אנחנו צריכים להתחשב גם במחזוריות ה- $\sin$ וה- $\cos$ ב- $360^\circ k$. כלומר:

$$r_1 cis(\alpha) = r_2 cis(\beta)$$

אם ורק אם:

$$r_1 = r_2 \text{ וגם } \alpha = \beta + 360^\circ k$$

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

פתרון משוואות מרוכבות באמצעות הייצוג הטריגונומטרי :

כעת נלמד את אחד הנושאים החשובים בענף המרוכבים - פתרון משוואה מהסוג $z^n = w$.

למשוואה זו יהיו בדיוק n שורשים, ואם $z = r_1 \operatorname{cis}(\theta)$ ו- $w = r_2 \operatorname{cis}(\alpha)$ אז :

$$r_1^n \operatorname{cis}(n\theta) = r_2 \operatorname{cis}(\alpha)$$

$$r_1^n = r_2 \text{ וגם } n\theta = \alpha + 360^\circ k$$

$$r_1 = \sqrt[n]{r_2} \text{ וגם } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{360^\circ}{n} k$$

עבור $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

דוגמה מבגרות :

נתונה משוואה I : $w^6 = -27$, w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II : $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של משוואה II נמצאות על מעגל,

ומצאו את משוואתו.

א.

$$w^6 = -27$$

נסמן $w = r_0 \operatorname{cis}(\theta)$ ונמצא את הייצוג הטריגונומטרי של -27 :

$$|-27| = 27, \quad \alpha = 180^\circ \text{ גרפית}$$

כלומר :

$$r_0^6 \operatorname{cis}(6\theta) = 27 \operatorname{cis}(180^\circ)$$

$$r_0^6 = 27 \text{ וגם } 6\theta = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$r_0 = \sqrt[6]{27} \text{ וגם } \theta = 30^\circ + 60^\circ k$$

והפתרונות הן :

$$z_1 = \sqrt[6]{27} \operatorname{cis}(30^\circ) \quad (k = 0), \quad z_2 = \sqrt[6]{27} \operatorname{cis}(90^\circ) \quad (k = 1)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{27} \operatorname{cis}(150^\circ) \quad (k = 2), \quad z_4 = \sqrt[6]{27} \operatorname{cis}(210^\circ) \quad (k = 3)$$

$$z_5 = \sqrt[6]{27} \operatorname{cis}(270^\circ) \quad (k = 4), \quad z_6 = \sqrt[6]{27} \operatorname{cis}(330^\circ) \quad (k = 5)$$

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

ב(1). נסמן $k = z + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ כך שמתקבלת המשוואה:

$$k^6 = -27$$

זו בדיוק המשוואה שפתרנו מסעיף א' ולכן פתרונותיה יהיו:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{3} \operatorname{cis}(30^\circ), & k_2 &= \sqrt{3} \operatorname{cis}(90^\circ) \\ k_3 &= \sqrt{3} \operatorname{cis}(150^\circ), & k_4 &= \sqrt{3} \operatorname{cis}(210^\circ) \\ k_5 &= \sqrt{3} \operatorname{cis}(270^\circ), & k_6 &= \sqrt{3} \operatorname{cis}(330^\circ) \end{aligned}$$

או בייצוג אלגברי (לפי נוסחת אוילר):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & k_2 &= \sqrt{3} \\ k_3 &= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & k_4 &= -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ k_5 &= -\sqrt{3}i, & k_6 &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

מכיוון ש- $z + \frac{\sqrt{3}}{2}i = k$ נקבל $z = k - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. נחסר מכל פתרון $\frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3}{2}, & z_2 &= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 &= -\frac{3}{2}, & z_4 &= -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i \\ z_5 &= -\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i, & z_6 &= \frac{3}{2} - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

ב(2). נסתכל על פתרון המשוואה I . הערכים המוחלטים של כל הפתרונות הם $\sqrt{3}$. מכאן כי המרחק מכל פתרון לראשית הצירים הוא קבוע והוא $\sqrt{3}$. אם כל הפתרונות הללו, הנקודות הללו, נמצאות במרחק שווה מראשית הצירים, הן נמצאות על המעגל הקוני $x^2 + y^2 = 3$. מכיוון שפתרונות המשוואה II הם הזזה של פתרונות המשוואה I ב- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ מטה (אנכית), פתרונות אלו ימשיכו להיות על אותו המעגל, שיהיה מעגל הנמוך ב- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ מהמעגל המקורי: $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$.

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

מצולעים משוכללים במישור גאוס:

שאלות רבות בבגרות מקשרות בעיות בגיאומטריה אנליטית לבעיות במספרים מרוכבים. אחת הדוגמאות הנפוצות ביותר היא הוכחה כי סט מסוים של מספרים מרוכבים מהווה קודקודים של מצולע משוכלל - מצולע שכל צלעותיו וזוויותיו שוות.

משפט:

למשוואה $z^n = a + bi \neq 0$ תמיד יהיו n פתרונות, וכל אחד מהם מייצג קודקוד של מצולע משוכלל בעל n צלעות החסום במעגל קנוני במישור גאוס.

הוכחה:

נסמן $z = r \operatorname{cis}(\theta)$ ו- $a + bi = r_0 \operatorname{cis}(\alpha)$. מכאן כי לפי פתרון משוואה בייצוג טריגונומטרי:

$$r_z = \sqrt[n]{r_0}$$

כלומר, מרחק כל הפתרונות מראשית הצירים יהיה קבוע $\sqrt[n]{r_0}$ ועל כן כל הפתרונות נמצאים על מעגל קנוני במישור גאוס.

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{360^\circ}{n} k$$

הקפיצה בזווית בין כל שני קודקודים עוקבים היא קבועה, $\frac{360^\circ}{n}$, ולכן הקודקודים נמצאים במרחקים שווים זה מזה - כלומר הם קודקודי מצולע משוכלל.

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

פתרון שאלת בגרות מגוונת:

נתונה המשוואה $z^3 = -64$.

z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$$

$$50^\circ < \alpha < 130^\circ$$

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו- w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α .

נתון כי w_1 הוא אחד מן הפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r .

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

ABCD הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1 , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3 ,

הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2 , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4 .

ד. הראו כי שטח המרובע ABCD הוא 36.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר u , נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA.

נתון כי $|\bar{u} + \frac{1}{u}| = 5.2 \cdot (\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$, $|u| > 1$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u .

סיכום - מספרים מרוכבים ומישור גאוס

א. נסמן $z = rcis(\theta)$ ונמצא ייצוג טריגונומטרי ל-(-64):

$$|-64| = 64, \alpha = 180^\circ \text{ גרפי}$$

והמשוואה הופכת ל:

$$r^3 cis(3\theta) = 64 cis(180^\circ)$$

$$r^3 = 64 \text{ וגם } 3\theta = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$r = 4 \text{ וגם } \theta = 60^\circ + 120^\circ k$$

והפתרונות הן:

$$z_1 = 4cis(60^\circ), \quad z_2 = 4cis(180^\circ) = -4, \quad z_3 = 4cis(300^\circ)$$

ב.

$$w_1 = rcis(\alpha), \quad w_2 = 2rcis(4\alpha)$$

אם שתייהן נמצאות על ישר שעובר בראשית הצירים, המרחק ביניהן צריך להיות כזווית שטוחה בת 180 מעלות (לא ידוע אם חיובי או שלילי):

$$4\alpha - \alpha = 180^\circ k$$

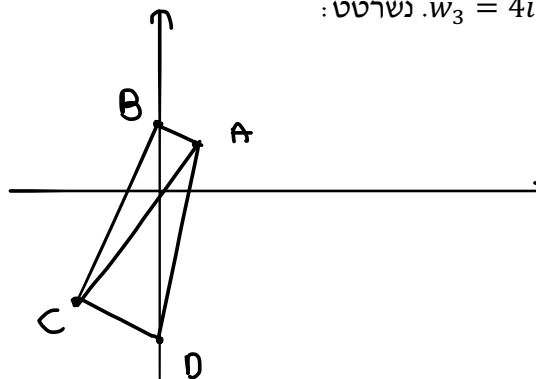
$$3\alpha = 120^\circ k$$

$$\alpha = 60^\circ k$$

$$\alpha = 60^\circ, 120^\circ$$

ג. לאחר השוואה עם z_1, z_2, z_3 נקבל בהכרח ש- $w_1 = z_1$ ו- $\alpha = 60^\circ$. מכאן כי גם $r = 4$.

$$\text{ד. } w_3 = 4i, w_4 = \frac{8}{i} = -8i \text{ נשרטט:}$$



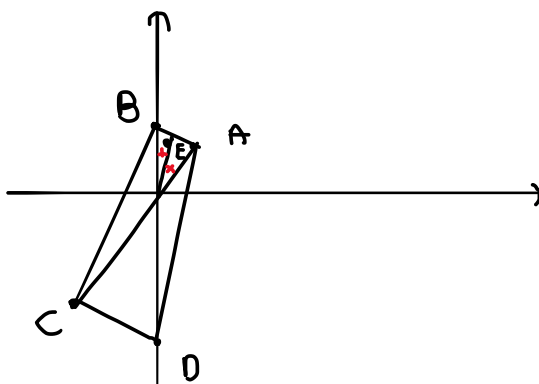
מרחק BD הוא סכום המרחקים של הקודקודים w_3, w_4 מהראשית - $BD = |w_3| + |w_4| = 4 + 8 = 12$.

מרחק AC הוא סכום המרחקים של הקודקודים w_1, w_2 מהראשית - $AC = |w_1| + |w_2| = 4 + 8 = 12$.

הזווית בין BD ל- AC היא $\angle AOB$ המקיימת: $\angle AOB = \theta_B - \theta_A = \theta_{w_3} - \theta_{w_1} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$$\text{מכאן כי שטח המצולע הוא } \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(30^\circ)}{2} = \frac{144}{4} = 36 \text{ יחידות.}$$

ה.



אם E על חוצה הזווית $\angle BOA = 30^\circ$ הארגומנט שלו הוא $\theta_A + 15^\circ$. כלומר, u הוא מספר מהסוג $r_u \text{cis}(75^\circ)$.

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned}\bar{u} + \frac{1}{u} &= 5.2 \text{cis}(285^\circ) \\ \bar{u} + \frac{\bar{u}}{|u|^2} &= 5.2 \text{cis}(285^\circ) \\ r_u \text{cis}(-75^\circ) + \frac{r_u \text{cis}(-75^\circ)}{r_u^2} &= 5.2 \text{cis}(285^\circ) \\ r_u \text{cis}(-75^\circ) + \frac{1}{r_u} \text{cis}(-75^\circ) &= 5.2 \text{cis}(285^\circ) \\ \left(r_u + \frac{1}{r_u}\right) \text{cis}(-75^\circ) &= 5.2 \text{cis}(285^\circ)\end{aligned}$$

מכאן כי בהכרח

$$\begin{aligned}r_u + \frac{1}{r_u} &= 5.2 \\ r_u^2 - 5.2r_u + 1 &= 0 \\ r_u &= 5, 0.2\end{aligned}$$

נתון, $|u| = r_u > 1$ ולכן $r_u = 5$. כלומר, $u = 5 \text{cis}(75^\circ)$.