

חקירת פונקציה אי רציונלית – פונקציית שורש

פונקציה אי רציונלית היא פונקציה המכילה שורש ובו ביטוי אלגברי תלוי x .

$$\text{לדוגמה, } f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

נסביר באמצעות דוגמאות את התנהלות החקירה של משפחת הפונקציות הללו.

א. תחום הגדרה: נדרוש שכל הביטויים שמתחת לשורש יהיו אי שליליים:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 2 &\geq 0 \\(x - 2)(x + 1) &\geq 0 \\x &\leq -1 \text{ או } x \geq 2\end{aligned}$$

Type equation here.

ב. נקודות חיתוך עם הצירים: כפי שעשינו עד כה. נשווה עבור חיתוך עם ציר x את הפונקציה לאפס (ונפתור משוואה אי רציונלית), ואילו עבור חיתוך עם ציר y נציב 0 בפונקציה:

חיתוך עם x :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - x - 2} &= 0 \\x^2 - x - 2 &= 0 \\x &= -1, 2\end{aligned}$$

ולכן החיתוך הוא בנק' $(-1, 0)$, $(2, 0)$.

חיתוך עם ציר y : נשים לב ש- $x = 0$ אינו בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר y

ג. נקודות קיצון: נכיר את הנגזרת של פונקציית שורש.

אפשר להסתכל על פונקציית שורש כפונקציה מורכבת, שכן אם מתקיים: $g(x) = \sqrt{f(x)}$

$$g(x) = f(x)^{\frac{1}{2}}$$

נגזרת זו אנו מכירים:

$$g'(x) = \frac{1}{2} f(x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot f'(x) = \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x)$$

נזכור חוקי חזקות:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

ולסיכום, הנגזרת של הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ היא $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

ננישם עבור הפונקציה שלנו:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

נשווה לאפס למציאת קיצון:

$$\frac{2x-1}{2(\sqrt{x^2-x-2})} = 0$$

תחום הגדרה: $x^2 - x - 2 > 0$ ולכן $x > 2$ או $x < -1$

נשווה את המונה לאפס (דיברנו על המכנה בתחום ההגדרה..)

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

אך הפתרון אינו בתחום ההגדרה ולכן אין נקודות קיצון רגילות, ורק נקודות קיצון קצה: $x = -1, 2$.

ד. תחומי עליה וירידה: נבדוק את התנהלות סימני הנגזרת סביב נקודות תחום ההגדרה והקיצון:

x	-2	$-1 \leq x \leq 2$	3
f'	-		+
f			

לפיכך תחום העלייה הוא $x > 2$ ותחום הירידה הוא $x < -1$.

ה. אסימפטוטות מאונכות לצירים:

לפונקציות שורש ללא מכנה תלוי x אין אסימפטוטות אנכיות ואופקיות. (עברו לסיכום "פונקציית מנה משולבת שורש" עבור מידע נוסף).

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה:

